

ТЕПЛОПЕРЕНОС В ПЛЕНКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМ УЧАСТКОМ НАГРЕВА

АННОТАЦИЯ

Исследуется теплообмен между жидкой пленкой, стекающей по локально обогреваемой пластине, и потоком газа над поверхностью жидкости. Коэффициент теплообмена между жидкостью и газом считается заданным; на обогреваемом участке пластины задан тепловой поток в жидкость. Выведено уравнение, которое описывает двухмерное распределение температуры в пленке, и получено аналитическое решение этого уравнения в виде сходящегося ряда. Проанализировано влияние безразмерных критериев на полученное решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование гидродинамики и тепло-массообменных процессов при совместном движении жидкости и газа имеет как научное, так и практическое значение. В частности, тонкие пленки жидкости широко используются для охлаждения поверхности элементов микроэлектронной аппаратуры. В таких системах на локальных участках течения реализуются большие тепловые нагрузки. Интенсифицировать теплообмен в таких системах можно за счет движения газа над поверхностью жидкости, при этом теплоперенос существенно зависит от многих факторов (воздействие на движение пленки газового потока, термокапиллярный эффект, распределение теплового потока, и т. д.). Различные аспекты динамики жидкой пленки и теплопереноса рассматривались теоретически в [1-5] в приближении тонкого слоя. В упрощенной постановке в уравнениях движения жидкости и в уравнении теплопереноса обычно пренебрегают конвективными членами при $Re \ll 1$ и переносом тепла в направлении течения по сравнению с теплопереносом поперек пленки. Результаты, полученные на основе упрощенных моделей необходимо сопоставлять с расчетами, полученными из более общих моделей. В [6] теплоперенос от локализованного нагревателя к пленке исследовался численным методом с учетом неоднородности теплового потока на поверхности нагрева, но при этом теплообмен с газом не учитывался. Следует отметить, что теплообмен в пленке с локальным источником тепла, изучен недостаточно (особенно, влияние газового потока на теплоперенос); основная информация получена из экспериментов.

Цель настоящей работы — разработать упрощенную аналитическую модель теплопередачи в ламинарной пленке жидкости, стекающей по локально обогреваемой твердой поверхности, с уче-

том воздействия на пленку движущегося газа и теплопереноса в жидкости в направлении течения.

2. ТЕПЛОПЕРЕНОС В ЖИДКОСТИ

Рассмотрим двумерное, стационарное, ламинарное течение пленки вязкой жидкости толщиной h по пластине, образующей угол θ с горизонтом и имеющей локально обогреваемый участок длиной l . Поверхность жидкости контактирует с движущимся неограниченным потоком газа. Воздействие газового потока на движение жидкой пленки учитывается заданным касательным напряжением на межфазной поверхности τ_s . Введем декартову систему координат Oxy (см. рис. 1) и примем следующие упрощающие предположения:

- 1) на участке нагрева ($0 < x < l$) задана плотность теплового потока в жидкость j ;
- 2) вне участка нагрева (при $x < 0$, $x > l$) поверхность пластины теплоизолирована;
- 3) при $x \rightarrow \pm\infty$ жидкость и пластина находятся в тепловом равновесии с газом, т. е. температура пленки, температура окружающего газа и температуры пластины равны T_g ;
- 4) газ занимает область $y > h$; воздействие газового потока на движение жидкой пленки учитывается заданным касательным напряжением на межфазной поверхности.
- 5) теплообмен на поверхности пленки определяется законом Ньютона.

Предположения 4, 5 означают, что по отношению к тонкому слою жидкости газ представляет собой бесконечный резервуар для передачи тепла. Коэффициент теплообмена α_g и касательное напряжение на поверхности пленки τ_s определяются параметрами газового потока и считаются известными.

Профиль скорости в пленке определяется из уравнений стационарного течения жидкости [7]:

$$u(y) = \frac{g \sin \theta}{2\nu} \cdot (2yh - y^2) + \frac{\tau_s y}{\mu}$$

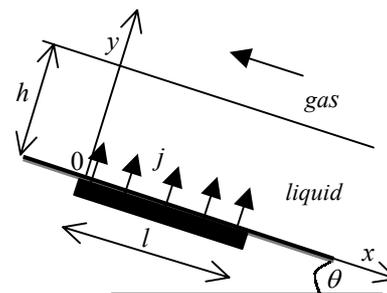


Рис. 1 Схема течения.

С учетом сделанных упрощений запишем уравнение теплопереноса в жидкости:

$$u(y) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

Выберем в качестве масштабов переменных следующие величины: для координаты h , для скорости $u_m = gh^2/3\nu$, для температуры $T_m = jh/\lambda$ и перейдем к безразмерным переменным $(T - T_g)/T_m$, x/h , y/h , u/u_m , сохраняя прежние буквенные обозначения. Уравнение (1) и граничные условия примут вид:

$$Pe \cdot u(y) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} + Bi \cdot T \right) \Big|_{y=1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \begin{cases} -1, & x \in (0; l) \\ 0, & x \notin (0; l) \end{cases}, \quad (3)$$

$$T(x, y) \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0.$$

Здесь $u(y) = 3 \sin \theta \cdot (y - y^2/2) + r y$, $Bi = \alpha_g h / \lambda$ - число Био, $Pe = Pr \cdot (gh^3/3\nu^2)$ - число Пекле, $r = 3\tau_s / \rho gh$ - безразмерное касательное напряжение на поверхности пленки.

Интегрируя (2) по координате y с учетом граничных условий (3), получим интегральное уравнение теплопереноса

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dy - Pe \cdot \int_0^1 u \frac{\partial T}{\partial x} dy - Bi \cdot T \Big|_{y=1} = \begin{cases} -1, & x \in (0; l) \\ 0, & x \notin (0; l) \end{cases}$$

Будем искать его решение в виде:

$$T(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos(\beta_n y), & x \notin (0; l) \\ T_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos(\beta_n y), & x \in (0; l) \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $f_n(x) \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, $T_0(y) = 1/Bi + 1 - y$ распределение температуры, которое установилось бы для полубесконечного участка нагрева вдали от края нагревателя; $\cos(\beta_n y)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ - собственные ортогональные функции, удовлетворяющие первому условию (3). Собственные значения β_n есть корни уравнения

$$Bi \cdot \operatorname{ctg} \beta = \beta \quad (5)$$

Решение (4) удовлетворяет обоим краевым условиям (3). Подставим (4) в интегральное уравнение;

учитывая, что $\int_0^1 \cos(\beta_n y) dy = (Bi \cdot \cos \beta_n) / \beta_n^2$, получаем для $f_n(x)$ уравнение

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} - k_n \frac{df_n}{dx} - \beta_n^2 f_n = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } k_n = \frac{Pe \cdot \beta_n^2}{Bi \cdot \cos \beta_n} \int_0^1 u(y) \cdot \cos(\beta_n y) dy, \quad (7)$$

Характеристический многочлен для (6) имеет два действительных корня различных знаков:

$$p_n = 0,5 \left(k_n + \sqrt{k_n^2 + 4\beta_n^2} \right) > 0, \\ q_n = 0,5 \left(k_n - \sqrt{k_n^2 + 4\beta_n^2} \right) < 0, \quad (8)$$

Представим $T_0(y)$ также в виде ряда:

$$T_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(\beta_n y). \quad (9)$$

С учетом условия $T(x, y) \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, решение уравнения (6) ищем в виде

$$x < 0: T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{p_n x} \cos(\beta_n y),$$

$$x \in (0; l): T = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n - B_n e^{p_n x} - C_n e^{q_n x}) \cos(\beta_n y),$$

$$x > l: T = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{q_n x} \cos(\beta_n y)$$

Константы A_n, B_n, C_n, D_n найдем из условий непрерывности функций $T(x, y)$ и $\partial T(x, y) / \partial x$ при $x = 0$ и $x = l$. Отсюда распределение температуры жидкости в пленке имеет вид:

$$x < 0: T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{1 + s_n} \cdot (e^{p_n x} - e^{p_n(x-l)}) \cos(\beta_n y),$$

$$x \in (0; l): T = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \left(1 - \frac{e^{p_n(x-l)} + s_n e^{q_n x}}{1 + s_n} \right) \cos(\beta_n y),$$

$$x > l: T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n s_n}{1 + s_n} (e^{q_n(x-l)} - e^{q_n x}) \cos(\beta_n y) \quad (10)$$

Здесь $s_n = -p_n / q_n > 0$, а коэффициенты F_n в разложении (9) найдем из ортогональности собственных функций $\cos(\beta_n y)$:

$$F_n = \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{Bi} + 1 - y \right) \cos(\beta_n y) dy}{\int_0^1 \cos^2(\beta_n y) dy} = \frac{2}{\beta_n^2 + Bi \cdot \cos^2 \beta_n} \quad (11)$$

Подставляя профиль скорости в интеграл (7), получаем:

$$k_n = \frac{Pe}{Bi \cdot \cos \beta_n} \cdot (P + Q), \quad (12)$$

где $P = 3 \sin \theta \cdot (0,5 \beta_n \cdot \sin \beta_n + \sin \beta_n / \beta_n - 1)$,
 $Q = r \cdot (\beta_n \sin \beta_n + \cos \beta_n - 1)$.

Таким образом, решение (10) полностью определяется параметрами Bi, Pe, r, θ .

Рассмотрим асимптотики решения (10). В случае $Bi \ll 1$ из (5) находим $\beta_1^2 \approx Bi$, $\beta_n \approx \pi \cdot (n-1)$ ($n=2,3,\dots$). При этом в (10) можно ограничиться первым членом ряда. Из (12) находим $k_1 = Pe \cdot (\sin \theta + r/2) = Pr \cdot Re$.

Если $Pr \cdot Re \gg \sqrt{Bi}$, то кондуктивный теплоперенос в продольном направлении пренебрежимо мал по сравнению с конвекцией. В этом случае если $Re > 0$ (жидкость движется в направлении силы тяжести), то перенос тепла вверх по потоку практически отсутствует. Температура жидкости на участке нагрева растет, а ниже участка нагрева пленка медленно остывает. Если же $Re < 0$ (пленка, увлекаемая потоком газа, движется против силы тяжести), то «тепловой след» в пленке расположен выше участка нагрева.

В обратном случае $Pr \cdot |Re| \ll \sqrt{Bi}$ имеем $p_1 \approx -q_1 \approx \sqrt{Bi}$ и движение жидкости практически не влияет на теплопередачу. За счет кондуктивного теплопереноса в продольном направлении пленка оказывается нагретой как выше, так и ниже участка нагрева. При этом тепло, полученное жидкостью, быстро передается потоку газа, а протяженность зоны нагретой пленки лишь незначительно превышает длину участка нагрева.

Если необходимо охлаждать жидкой пленкой множество элементов микроселектронной аппаратуры, возникает проблема размещения локальных нагревателей. Действительно, для снижения температуры нагревателя необходимо увеличить значение Re , но при этом возрастает протяженность зоны, в которой происходит остывание жидкости. Это не позволяет компактно разместить нагреватели, поэтому необходима оптимизация параметров течения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Как показали расчеты, при $Bi \leq 0,1$ достаточно взять 3-4 членов ряда (вклад остальных слагаемых менее 0,1%). При $Bi \approx 1$ для достижения той же точности необходимо учитывать 10-11 слагаемых.

На рис. 2 приведены расчетные зависимости температуры жидкости на поверхности нагрева $T(x,0)$ для вертикальной пленки и противоточного движения газа при $l=100$; $Bi=0,1$; $Pe/Pr=1$ (при постоянной толщине пленки). При большой длине участка нагрева и умеренных значениях $Re \leq 1$ температура жидкости достигает равновесного значения $T^* = 1/Bi + 1$ уже вблизи передней кромки нагревателя. Ниже участка нагрева температура жидкости постепенно уменьшается вследствие теплообмена с газом. Протяженность «теплового следа» сильно зависит от расхода жидкости в пленке. При увеличении скорости противоточного движения газа (уменьшении Re) сокращается протяженность зоны, в которой происходит нагрев пленки до равновесной температуры, а также протяженность «теплового следа» – область нагретой пленки стано-

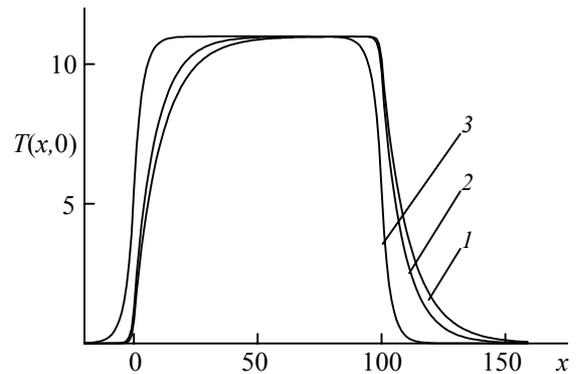


Рис. 2. Температура жидкости на поверхности нагрева l : 1: $Re = 1$; 2: $Re = 0,75$; 3: $Re = 0$;

вится более локализованной. При $Re=0$ область нагретой пленки почти совпадает с участком нагрева. При $Bi \ll 1$ перепад температуры по толщине пленки мал, поэтому такой же характер имеют распределения температуры на поверхности пленки и температуры средней по толщине пленки.

На рис. 3 приведены зависимости $T(x,0)$ для тех же условий течения при $l=10$, $Bi=1$, $Pe/Pr=10$. Для участка нагрева умеренной длины температура жидкости не успевает достигнуть равновесного значения. Для $Re > 10$ охлаждение жидкости ниже участка нагрева происходит в довольно протяженной зоне, это противоречит условию компактного размещения нагревателей. При уменьшении Re от 7,5 до нуля область нагретой пленки сокращается примерно втрое, но при этом существенно возрастает максимальная температура жидкости на поверхности нагрева. Зависимости $T(x,1)$ температуры жидкости на поверхности пленки показаны на рис. 4. При $Bi \approx 1$ температура на поверхности пленки существенно меньше, чем на поверхности нагревателя. В целом распределения $T(x,1)$ аналогичны зависимостям $T(x,0)$, однако при $Re \approx 10$ вблизи передней кромки нагревателя имеется короткий участок, на котором температура жидкости несколько меньше температуры газа.

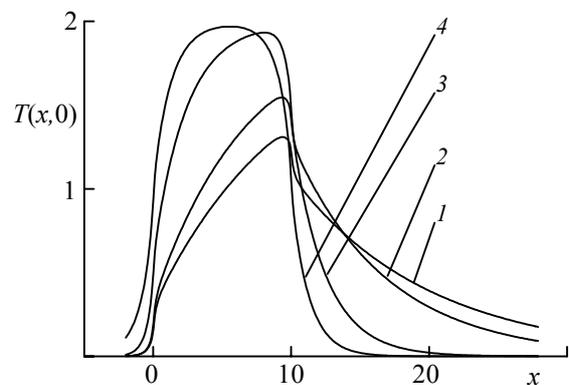


Рис. 3. Температура жидкости на поверхности нагрева l : 1: $Re = 7,5$; 2: $Re = 5$; 3: $Re = 1,25$; 4: $Re = 0$.

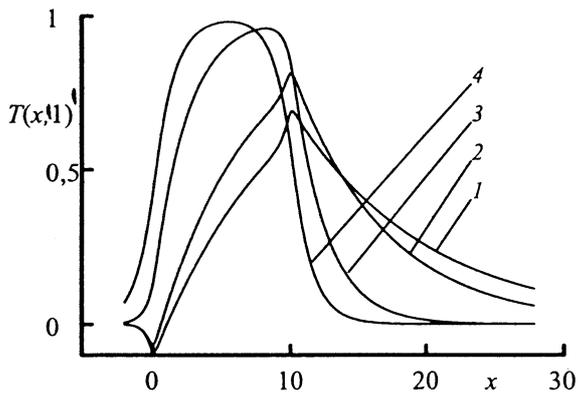


Рис. 4. Температура жидкости на поверхности пленки
1: $Re = 7,5$; 2: $Re = 5$; 3: $Re = 1,25$; 4: $Re = 0$.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

a	температуропроводность, m^2/c ;
g	ускорение свободного падения, m/c^2 ;
x, y	координаты, м;
u	скорость, м/с;
h	толщина пленки, м;
l	длина участка нагрева, м;
j	плотность теплового потока, $Вт/м^2$;
T	температура жидкости, К;
T_g	температура газа, К;
α_g	коэффициент теплообмена с газом, $Вт/(м^2 К)$;
λ	теплопроводность жидкости, $Вт/(К·м)$;
ρ	плотность жидкости, $кг/м^3$;
ν	кинематическая вязкость жидкости;
μ	динамическая вязкость жидкости;
τ_x	касательное напряжение на поверхности пленки
θ	угол наклона к горизонту
	Безразмерные комплексы
$Bi = \alpha_g h / \lambda$	число Био
$Pr = \nu / a$	число Прандтля
$Re = Pr \cdot (gh^3 / 3\nu^2)$	число Пекле
$Re = \frac{gh^3}{3\nu^2} \cdot \int_0^1 u dy = \frac{Pe \cdot (\sin \theta + r/2)}{Pr}$	число Рейнольдса
$r = 3\tau_x / \rho gh$	безразмерное касательное напряжение на поверхности пленки

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тананайко Ю.М., Воронцов Е.Г.** Методы расчета и исследования пленочных процессов. Киев: Техника, 1975, 312 С.
2. **Локшин Дж. Л.** Теплообмен в стекающей ламинарной пленке. // Труды 2 Российской нац. конф. по теплообмену, Москва, 1988, Т. 8, С. 28 – 29.
3. **Гатапова Е.Я., Кабов О.А., Марчук И.В.** Термокапиллярная деформация локально нагреваемой пленки жидкости, движущейся под действием газового потока // Письма в ЖТФ, 2004, Т. 30, вып. 10, С. 46 – 52.
4. **Актершев С.П.** Деформация поверхности пленки вязкой жидкости вследствие термокапиллярного эффекта при стационарном течении по вертикально обогреваемой пластине // Теплофизика и аэромеханика, 2004, Т.11, № 2, С. 291 – 303
5. **Kuznetsov V.V.** Dynamics of locally heated liquid films // Russ. J. Engin. Thermophys 2000, V. 10 № 2, P.107 – 120.
6. **Kabov O.A., Marchuk I.V.** Numerical simulation of heat transfer in a falling liquid film with allowance for heat conduction in heaters // Russ. J. Engin. Thermophys, 2000, V. 10 № 2, P.147 – 166.
7. **Alekseenko S.V., Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G.** Wave flow of liquid films, Begell House, New York, 1994, 313 P.