УДК 530.1: 536.2 (0.75)

И.С. Елисеев, Н.М. Цирельман

Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия

ДЕТАЛИЗАЦИЯ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕПЛООБМЕНУ ПРИ КИПЕНИИ

АННОТАЦИЯ

С выделением понятия простой существенной переменной расширено применение метода анализа размерностей и даны примеры его использования при рассмотрении теплообмена при кипении жидкостей.

1. ВВЕДЕНИЕ

На практике часто приходится сталкиваться с такими процессами, для которых отсутствует соответствующая математическая модель, и тогда единственным путем их изучения становятся экспериментальные исследования. В [1–5] было показано, насколько рационально в таких случаях проводить опытные работы и устанавливать обнаруженные связи между характерными для процессов физическими величинами, если использовать обобщенные переменные в виде критериев (чисел) подобия. Именно применение метода анализа размерностей и позволило воспользоваться аппаратом обобщенных переменных. Однако результаты этого могут быть правильными и полезными лишь тогда, когда исследователь четко представляет себе, какие физические величины (характеристики) определяют суть объекта исследования, т.е. важны для протекания соответствующего физического процесса.

Эти характеристики, как правило, имеют определенную размерность, и их численное значение в известной мере зависит от выбранной системы единиц измерения. Чтобы избежать этой зависимости, не связанной с физическим содержанием изучаемого процесса, при сравнении и обобщении результатов исследования используют одну и ту же систему единиц измерения или, что более универсально, формируют безразмерные переменные в виде конечных произведений степеней существенных величин-характеристик.

2. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Как утверждает известная “π-теорема” Бэкингема, существует бесконечно много эквивалентных друг другу систем из одного и того же количества n безразмерных независимых комплексов $\pi_1, \ldots, \pi_n$, из которых могут быть получены все остальные безразмерные комплексы в виде степеней $\pi_1^{\alpha_1}, \ldots, \pi_n^{\alpha_n}$ с действительными показателями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Независимость комплексов $\pi_1, \ldots, \pi_n$ означает, что ни один из них не составляется из других в виде произведений их степеней. Такие “наборы” безразмерных комплексов в дальнейшем изложении будем называть базисными (или просто базисами) или фундаментальными. При этом, в соответствии с исходной формулировкой “π-теоремы” Бэкингема, имеет место равенство

$$n = s - m, \tag{1}$$

где n – максимальное число независимых безразмерных комплексов; s – количество всех существенных переменных; m – минимальное количество размерностей первичных переменных, составляющих размерности всех s.

Позднее рядом исследователей [6] было показано, что соотношение (1) выполняется, вообще говоря, не всегда и в общем случае вместо него должно рассматриваться равенство

$$n = s - \widetilde{m}_1, \tag{2}$$

где $\widetilde{m}_1$ – максимальное количество существенных переменных, которые не могут быть объединены в безразмерный комплекс.

Можно показать, что $\widetilde{m}_1 \le m$, причем имеются случаи, когда $\widetilde{m}_1 < m$, и тогда формула (1) неверна.

Отметим, что $\widetilde{m}_1$ есть ранг некоторой матрицы, однозначно определяемый по известному набору существенных переменных методами линейной алгебры.

Поэтому, на наш взгляд, приобретает значение выделение условий, при которых можно предварительно оценить и (или) установить возможное число n независимых комплексов, а также решить вопрос о существовании таких комплексов на этапе формирования набора существенных для исследуемого процесса переменных еще до установления числа $\widetilde{m}_1$.

В этом смысле интересно, например, выделение тех или иных простых условий, при которых верна первоначальная формулировка “π-теоремы” Бэкингема (1), так как число m находится значительно проще и быстрее, нежели $\widetilde{m}_1$. Сюда примыкают также вопросы выяснения условий, при которых каждая из переменных, выделенная исследователем как существенная, входила хотя бы в один безразмерный комплекс и таким образом участвовала бы реально в структуре искомой зависимости для описания изучаемого процесса. Интересно и выяснение вопросов о минимальном числе существенных переменных, порождающих безразмерные комплексы, и о формировании минимального количества новых существенных переменных из первоначально выделенного набора существенных переменных.

Назовем первичной простую существенную переменную, если она имеет размерность ненулевой степени, и обозначим через $\widetilde{m}$ число таких переменных. Эту первичную переменную будем называть основанием данной простой переменной. Тогда, очевидно, имеют место соотношения

$$\widetilde{m} \le \widetilde{m}_1 \le m \le s\,, \tag{3}$$

и можно показать, что всегда справедливы неравенства

$$\widetilde{m}_1 \le m \text{ и } n \ge s - m\,. \tag{4}$$

Опуская доказательства, укажем на справедливость *утверждения 1* о том, что всегда имеют место неравенства

$$s - m \le n \le s - \widetilde{m}\,, \tag{5}$$

и при $\widetilde{m} < m$ справедливо неравенство

$$s - m \le n \le s - \widetilde{m} - 1\,. \tag{6}$$

Тогда справедливы следующие следствия:

- если $\widetilde{m} = m$ или $\widetilde{m} = m - 1$, то верна "π-теорема" Бэкингема в первоначальной формулировке (1);
- если $s = \widetilde{m}$ или $s = \widetilde{m} + 1$ и $\widetilde{m} < m$, то безразмерных комплексов нет;
- при $s > m$ безразмерные комплексы всегда имеются.

Таким образом, верно и *утверждение 2*:

- для существования безразмерных комплексов необходимо выполнение неравенства $s > \widetilde{m}$, а в случае $\widetilde{m} < m$ необходимо, чтобы $s > \widetilde{m} + 1$;
- для существования безразмерных комплексов достаточно того, чтобы выполнялось неравенство $s > m$, и при этом их количество n таково, что $n \ge s - m$;
- если некоторая первичная переменная участвует в размерности только одной существенной переменной, то эта существенная переменная исключается из описания процесса в терминах обобщенных переменных (безразмерных комплексов).

Из *утверждения 2* вытекают следующие следствия:

- для существования безразмерных комплексов необходимо соблюдать условие $s > \widetilde{m}$, а при $\widetilde{m} < m$ необходимо соблюдать условие $s > \widetilde{m} + 1$;
- для существования безразмерных комплексов достаточно выполнения условия $s > m$ и при этом их число равно $n \ge s - m$;
- при $\widetilde{m} = m$ и $\widetilde{m} = m - 1$ условия $s > \widetilde{m}$ и $s > \widetilde{m} + 1$ (при $\widetilde{m} < m$) являются также и достаточными условиями существования безразмерных комплексов в количестве $n = s - m$;
- если исследователь предполагает, что все выбранные существенные переменные должны участвовать в формировании описания исследуемого процесса в терминах безразмерных комплексов, то необходимо, чтобы каждая размерность из числа m основных первичных величин входила бы не менее чем в две существенные переменные.

В качестве примеров приложения развитых выше положений рассмотрим получение обобщенных переменных применительно к описанию процесса теплообмена при пузырьковом кипении жидкости в сосуде, для которого до сих пор отсутствует соответствующая математическая модель.

Пример 1. Пусть существенными переменными являются плотность теплового потока q [кг/с^3], ускорение внешнего поля g [м/с^2] и коэффициент динамической вязкости кипящей жидкости μ [кг/(м·с)]. Тогда имеем s = 3, m = 3 и с привлечением (1) $n = s - m = 0$.

Таким образом, известная формулировка "π-теоремы" Бэкингема в записи (1) утверждает, что в рассматриваемом случае безразмерных комплексов нет.

Между тем $\widetilde{m} = 0$ $(\widetilde{m} < m)$, $\widetilde{m}_1 = 2$ и в уточненной формулировке (2) получаем $n = s - \widetilde{m}_1 = 3 - 2 = 1$. И действительно, при рассматриваемом подходе имеем один безразмерный комплекс

$$\pi = g\mu / q\,.$$

Пример 2. Пусть существенными переменными являются не сами давление p[кг/(м·с^2)], ускорение внешнего поля g [м/с^2], плотность вещества ρ[кг/м^3] и плотность теплового потока q [кг/с^3], а величины $\overline{p} = p/q$ [с/м], $\overline{g} = g/p$ [м^2/кг] и $\overline{q} = q/\rho$ [м^3/с^3]. Кроме того, включим в число существенных переменных еще коэффициенты поверхностного натяжения σ [кг/с^2] и динамической вязкости μ [кг/(м·с)].

Тогда имеем $s = 5$, $m = 3$, $\widetilde{m} = 0$ $(\widetilde{m} < m)$, $\widetilde{m}_1 = 2$, $n = 3$, $s - m = 2$, $s - \widetilde{m} = 5$, $s - \widetilde{m} - 1 = 4$, т.е. выполняется случай $s - m < n < s - \widetilde{m} - 1$. Применение "π-теоремы" Бэкингема (1) приводило бы к неверным результатам о двух безразмерных комплексах, так как согласно (1), имеем

$$n = s - m = 5 - 3 = 2\,.$$

На самом деле получаем с привлечением (2)

$$n = s - \widetilde{m}_1 = 5 - 2 = 3\,,$$

т.е. имеем три безразмерных комплекса, которые таковы

$$\pi_1 = \overline{p}^3\overline{q}\,,\ \pi_2 = \overline{p}^2\overline{g}\sigma\,,\ \pi_3 = \overline{p}\overline{g}\mu\,.$$

Пример 3. Пусть существенными переменными являются $\overline{p}$ [с/м], $\overline{q}$ [м^3/с^3], $\sigma_1 = \sigma\overline{g}$ [м^2/с^2], $\mu_1 = \mu\overline{g}$ [м/с]. Тогда имеем s = 4, m = 2, $\widetilde{m} = 0$ $(\widetilde{m} < m)$, $\widetilde{m}_1 = 1$.

Нетрудно видеть, что в этом случае $s - m = 4 - 2 = 2$ и $s - \widetilde{m} - 1 = 4 - 0 - 1 = 3$, и тем самым достигается правая граница неравенства (6) в отношении возможного диапазона изменения величины n

$2 \le n \le 3$.

Применение “π-теоремы” Бэкингема (формула (1)) привело бы к неверному результату n=2, тогда как истинное количество безразмерных комплексов, согласно (2), равно трем: $\pi_1 = \overline{p}^3\overline{q}$, $\pi_2 = \overline{p}^2\sigma_1$, $\pi_3 = \overline{p}\mu_1$.

Пример 4. Существенными переменными выбраны g [м/с^2], q [кг/с^3], λ [кг·м/(с^{3}К)], μ [кг/(м·с)], ρ [кг/м^3], σ [кг/с^2], p[кг/(м·с^2)]. Тогда имеем $s = 7$, $m = 4$, $n = s - m = 7 - 4 = 3$, “π-теорема” Бэкингема (формула (1)) выполняется и безразмерные комплексы таковы:

$$\pi_1 = g\mu/q\,,\ \pi_2 = \frac{p\mu^2}{\sigma^2\rho}\,,\ \pi_3 = g\sigma\rho/p^2\,.$$

Заметим, что коэффициент теплопроводности λ не вошел ни в один комплекс, так как размерность температуры θ [К] не содержится в размерности ни одной другой существенной переменной, что находится в полном соответствии со следствиями, вытекающими из *утверждения 2.* Имея в виду включение λ в безразмерные комплексы для рассматриваемой задачи кипения жидкости, можно ввести в число существенных переменных, например, удельную теплоемкость c [м^2/(с^{2}К)] с образованием дополнительного комплекса $\pi_4 = qc/(g\lambda)$ или добавить теплоту парообразования r [м^2/с^2] с образованием комплекса $\pi_4^* = p^2 r/q^2$. При этих добавлениях имеем s=8, m=4, n=s–m=4. Если одновременно ввести дополнительно c [м^2/(с^{2}К)] и r [м^2/с^2], то получим безразмерные комплексы π_4 и $\pi_5 = \pi_4^*$. При этом $s = 9$, $m = 4$, $n = 9 - 4 = 5$, т.е. “π-теорема” Бэкингема (1) справедлива.

Комплекс $\pi_1 \cdot \pi_4 = c\mu/\lambda$ =Pr представляет собой критерий Прандтля, а комплекс $\pi_3^{-1/2} = p/\sqrt{g\sigma\rho} = \mathrm{K_p}$ – это критерий, связанный с влиянием давления на теплообмен при кипении, если в нем под ρ понимать разность плотностей ρ' и ρ'' кипящей воды и образующегося из нее пара. Кроме того, имеем также безразмерный комплекс

$$\pi_6 = \pi_1(\pi_2\pi_5)^{-1}\pi_3^{-3/2} = \frac{q}{r\mu}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\,. \tag{7}$$

Полагая по-прежнему, что в нем ρ совпадает с $\rho' - \rho''$, умножим и разделим обе части (7) на $\rho'\rho''$ и получим

$$\pi_6 = \frac{q\rho'\rho''}{r\mu\rho'\rho''}\sqrt{\frac{\sigma}{(\rho'-\rho'')g}} = \frac{w_*\sqrt{\sigma/((\rho'-\rho'')g)}}{\mu/\rho'}\frac{\rho''}{\rho'} =$$
$$= \mathrm{Re}_*^{\mathrm{I}}\frac{\rho''}{\rho'}\,. \tag{8}$$

В безразмерном комплексе π_6 сомножитель $\mathrm{Re}_*^{\mathrm{I}}$ представляет собой известный критерий Рейнольдса, построенный по скорости парообразования $w_* = q/(r\rho'')$ и характеристической протяженности $l_*^{\mathrm{I}} = \sqrt{\sigma/((\rho'-\rho'')g)}$.

Пример 5. В исследуемом процессе давление p [кг/(мс^2)] однозначно связано с температурой кипения T'' [К]. Тогда при выборе в качестве существенных переменных g, q, r, c, λ, μ, ρ, σ и T'' получаем безразмерные комплексы $\pi_1 = g\mu/q$, $\pi_2 = q^2/(rg\rho\sigma)$, $\pi_3 = r\mu^2/\sigma^2$, $\pi_4 = c\mu/\lambda$, $\pi_5 = \frac{T''c}{r}$, среди которых $(\pi_2/\pi_3)^{1/2}\cdot\rho'/\rho'' = \mathrm{Re}_*^{\mathrm{I}}$ и $\pi_1\pi_2\pi_3^{-1}\pi_5 = \mathrm{Re}_*^{\mathrm{II}}$ представляют собой критерии Рейнольдса, построенные по скорости парообразования w_* и характеристической протяженности $l_*^{\mathrm{I}} = \sqrt{\sigma/((\rho'-\rho'')g)}$ или $l_*^{\mathrm{II}} = T''c\sigma\rho''/(r^2\rho'^2)$ соответственно.

Пример 6. И, наконец, если в примере 4 вместо q ввести характерную разность температур ΔT на обогреваемой поверхности и на удалении от нее, то имеем безразмерные комплексы $\pi_1 = p\mu^2/(\sigma^2\rho)$, $\pi_2 = p^2/(g\sigma\rho)$, $\pi_3 = c\mu/\lambda$, $\pi_4 = c\Delta T/r$, $\pi_5 = p^2 r/(g^2\mu^2)$, среди которых π_4^{-1} представляет собой критерий фазового превращения (критерий С.С. Кутателадзе), а $\pi_2^{1/2}$=$\mathrm{K_p}$.

Заметим в дополнение к изложенному, что верно следующее *предложение*: при наличии системы из n базисных безразмерных комплексов можно из исходных существенных переменных сформировать в виде произведений их степеней n+1 новых существенных переменных с тем же набором базисных безразмерных комплексов.

Действительно, если $\pi_1,\ldots,\ \pi_n$ – фундаментальная система комплексов и x – одна из исходных существенных переменных, то в качестве упомянутой системы существенных переменных можно взять $z_1 = \pi_1 x^{k_1},\ldots,\ z_n = \pi_n x^{k_n}$, $z_{n+1} = x$, т.е. $z_i = \pi_i x_i^{k_i}\ (k_i \ne 0)$, $1 \le i \le n$, $z_{n+1} = x$.

Такую существенную переменную x будем называть образующей для нового “набора” существенных переменных $z_1,\ldots,\ z_n,\ z_{n+1}$.

Тогда для вновь сформированной системы существенных переменных фундаментальная система имеет вид

$$\frac{z_1}{z_{n+1}^{k_1}},\ldots,\ \frac{z_n}{z_{n+1}^{k_n}}\,.$$

При этом, если x – это простая существенная переменная, то $m = \widetilde{m} = 1$ и выполняется “π-теорема" Бэкингема (в (5) устанавливается равенство и слева и справа), т.е. $s=n+1$, $s-m=s-\widetilde{m}=n+1-1=n$. Если же x – это сложная (составная) существенная переменная, имеющая в своем составе $m>1$ размерностей, то $s-m<s-1=n$ и "π-теорема" Бэкингема (1) не выполняется $\widetilde{m}=0<m$ и в правой части (6) достигается равенство $s-\widetilde{m}-1=s-1=n$.

Вообще говоря, максимально и минимально возможные разницы между левой и правой частями (1) в результате формирования указанным способом новых существенных переменных соответственно равны m_1-1 и m_2-1, где m_1 и m_2 – минимальное и максимальное число составляющих размерностей отдельно взятых исходных существенных переменных.

Например, взяв в качестве исходного набора существенных переменных для рассматриваемого здесь процесса кипения жидкости g, q, λ, μ, ρ, σ, p, r, c, а в качестве их нового набора $z_1=g\mu$, $z_2=p^3/\rho$, $z_3=g\sigma p$, $z_4=c/(g\lambda)$, $z_5=p^2 r$, $z_6=q$, имеем $\pi_1=z_1/q$, $\pi_2=z_2/q^2$, $\pi_3=z_3/q^2$, $\pi_4=qz_4$, $\pi_5=z_5/q^2$. При этом $m'=m_1=2$, $s'=n+1$, $\widetilde{m}'=0$, $s'-m'=n-1<n=s'-\widetilde{m}'-1$ (штрихами отмечены величины $s, m, \widetilde{m}, \widetilde{m}_1$ для нового набора существенных переменных).

Максимальное отклонение от равенства, устанавливаемого "π-теоремой" Бэкингема в форме (1), получим, взяв коэффициент теплопроводности λ в качестве исходной, образующей новую систему существенных переменных. Тогда имеем: $z_1=g\mu/(\lambda q)$, $z_2=p^3\lambda/(q^2\rho)$, $z_3=g\sigma p/(\lambda q^2)$, $z_4=qc/g$, $z_5=p^2 r/(\lambda q^2)$, $z_6=\lambda$. В этом случае выполняются соотношения $m'=m_2=4$; $s'=n+1$; $\widetilde{m}'=0$, $s'-m'=n-3$; $n=s'-\widetilde{m}'-1$, $\pi_1=z_1\lambda$, $\pi_2=z_2/\lambda$, $\pi_3=z_3\lambda$, $\pi_4=z_4/\lambda$, $\pi_5=z_5\lambda$.

Заметим, наконец, что в случае, когда имеются $n+1$ существенных переменных, их размерности являются степенями какой-либо фиксированной переменной из их числа и поэтому каждая из них составляется из одного и того же количества m' размерностей первичных переменных. И всегда разница между левой и правой частями (1) равна $m'-1$, так что "π-теорема" Бэкингема в этом случае выполняется лишь тогда, когда все существенные переменные являются простыми одного основания. Равенство же правых частей (5) и (6) в этой ситуации всегда достигается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гухман А.А.** Введение в теорию подобия. М.: Высшая школа, 1973. 295 с.
2. **Гухман А.А.** Применение теории подобия к исследованиям процессов тепломассообмена. М.: Высшая школа, 1974. 328 с.
3. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 386 с.
4. **Гухман А.А., Зайцев А.А.** Обобщенный анализ. М.: Факториал, 1998. 303 с.
5. **Цирельман Н.М.** Методы теории подобия и моделирования тепломассопереноса. Уфа:Изд-во УГАТУ, 2000. 94 с.
6. **Клайн С. Дж.** Подобие и приближенные методы. М.: Мир, 1968. 302 с.