

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПУЛЬСАЦИИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА ПРИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

АННОТАЦИЯ

Исследования динамики флуктуаций теплообмена показывают, что в кризисных и переходных режимах можно наблюдать высокоэнергетические флуктуации со спектром мощности, обратно пропорциональным частоте ($1/f$ флуктуации). В таких случаях возможна перекачка энергии от высокочастотных к низкочастотным колебательным модам и катастрофические выбросы в системе. Теория показывает, что $1/f$ флуктуации возникают в системе благодаря одновременному протеканию разнородных фазовых переходов в присутствии белого шума достаточной интенсивности. Исследована функция распределения флуктуаций при масштабных преобразованиях системы стохастических уравнений, описывающих генерацию $1/f$ шума. Показано, что гауссовское распределение случайного процесса с $1/f$ спектром переходит при масштабном преобразовании в экспоненциальное распределение, характерное для статистики экстремальных выбросов. Вероятность таких выбросов следует учитывать при прогнозировании устойчивости различных режимов теплообмена.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди множества стационарных случайных процессов выделяются процессы со спектром мощности обратно пропорциональным частоте – $1/f$ процессы. Они привлекают к себе масштабнo-инвариантным распределением флуктуаций. Масштабная инвариантность может быть связана с критическим поведением или самоорганизацией в сложных системах [1]. Примером масштабнo-инвариантного поведения является Колмогоровская турбулентность, когда в текущей жидкости возникают потоки энергии различных масштабов длины, подчиняющиеся единым универсальным законам подобия [2]. Но не все случайные процессы сводятся к турбулентности. Почти 80 лет назад в электронных устройствах были обнаружены флуктуации электрического напряжения, обратно пропорциональные частоте (фликкер шум) [3]. Оказалось, что случайные процессы с $1/f$ спектром встречаются во многих явлениях. Не только токовые и магнитные флуктуации в физике твердого тела, но и многие случайные процессы в астрофизике, геофизике, биологии, информатике имеют обратно пропорциональный частоте спектр мощности [4].

Но вопреки широкой распространенности отсутствует общепринятая модель $1/f$ случайного процесса, и в разных случаях с $1/f$ спектром связываются разные причины и строятся разные модели. Имеется много попыток объяснить возможный механизм генерации масштабнo-инвариантных флуктуаций на основе концепции самоорганизованной кри-

тичности [5], которая применяется для описания сложных систем с развитыми флуктуациями.

Исследования случайных процессов при теплообмене показали, что флуктуации с $1/f$ спектром могут возникать в результате взаимодействия докритического и закритического неравновесных фазовых переходов в присутствии белого шума [6]. Растянутое критическое поведение флуктуаций в этом случае характеризуется самоподобным распределением плотности вероятности, не изменяющимся во времени.

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $1/f$ ФЛУКТУАЦИЙ

В теории $1/f$ флуктуаций при неравновесных фазовых переходах [7] для описания динамики флуктуаций в сосредоточенной системе используются стохастические уравнения, которые в простейшем случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= -\phi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t); \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\phi^2\psi + 2\phi + \Gamma_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ϕ , ψ – динамические переменные (параметры порядка); Γ_1 , Γ_2 – гауссовы δ – коррелированные шумы, которые при записи системы уравнений в виде (1) могут иметь разные реализации, но одинаковые дисперсии. Коэффициент 2 при переменной ϕ во втором уравнении делает уравнения системы (1) неэквивалентными и означает наличие некоторого нескомпенсированного потока.

Для численного интегрирования система (1) переписывается в виде [8]:

$$\begin{aligned} \phi_{i+1} &= (\phi_i + \psi_i \Delta t)(1 + \psi_i^2 \Delta t)^{-1} + \xi_i \Delta t^{0.5}; \\ \psi_{i+1} &= (\psi_i + 2\phi_i \Delta t)(1 + \phi_i^2 \Delta t)^{-1} + \eta_i \Delta t^{0.5}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ξ_i и η_i – последовательности гауссовских случайных чисел с нулевым средним и стандартным отклонением σ , которые моделируют белый шум.

Такой вид приобретают уравнения, если значения брать не в начальной, а в конечной точке интервала разбиения Δt_i численного интегрирования системы (1). Это обеспечивает устойчивость численного интегрирования системы при произвольных начальных условиях и при любых шагах интегрирования Δt . Для того, чтобы не корректировать значения стандартного отклонения σ гауссовских

случайных чисел ξ_i и η_i при изменении шага интегрирования Δt , дифференциалы $\xi_i \Delta t^{0.5}$ и $\eta_i \Delta t^{0.5}$ в системе (2) содержат интервал времени в степени 0.5.

Система (1) и ее расчетный вариант (2) имеют индуцированный шумом переход по отношению к плотности вероятности $P(\sqrt{\phi^2 \psi^2})$. Окрестность критичности этого перехода определяет интенсивность внешнего шума ($\sigma \approx \sigma_c$), при которой система генерирует стохастические процессы $\phi(t)$ и $\psi(t)$ со спектрами мощности, соответственно обратно пропорциональным частоте $S_\phi \sim 1/f$ и обратно пропорциональным квадрату частоты $S_\psi \sim 1/f^2$ [9].

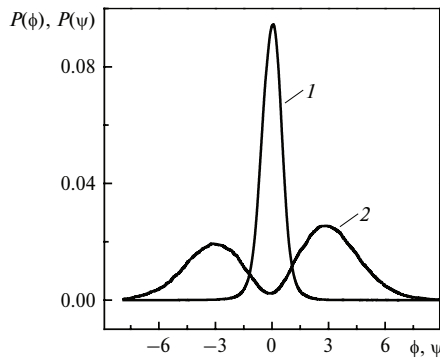


Рис. 1. Функции распределения $P(\phi)$ – 1 и $P(\psi)$ – 2

На рис.1 приведены функции распределения $P(\phi)$ и $P(\psi)$. Функция распределения $P(\phi)$ близка к гауссовской, но имеет длинные хвосты больших амплитудных выбросов, которые легко выявляются в полулогарифмических координатах. Распределение $P(\psi)$ характеризуется наличием двух максимумов и минимума в нуле, т.е. имеют бимодальный вид.

3. МАСШТАБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $1/f$ ФЛУКТУАЦИЙ

Рассмотрим, как изменяются функции распределения переменных при масштабных преобразованиях реализаций случайных процессов. Для этого из последовательности рассчитанных реализаций $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ создадим последовательность огрубленных реализаций $\{\phi^{(T)}\}$ с помощью усреднения по некоторому масштабу времени T , в соответствии с уравнением:

$$\phi_j^{(T)} = \frac{1}{T} \sum_{i=Tj}^{T(j+1)-1} \phi_i, \quad 0 \leq j \leq N/T. \quad (3)$$

Параметр T называют еще коэффициентом масштабного преобразования. Для первого масштаба реализация $\{\phi^{(1)}\}$ является просто исходной ре-

ализацией. Длина каждой последующей огрубленной реализации уменьшается в T раз, т.е. содержит N/T точек. Заметим, что данное масштабное преобразование не меняет частотную зависимость спектров. В случае $\phi_i^{(T)}$ спектр остается обратно пропорциональным частоте $S_\phi \sim 1/f$, а в случае $\psi_i^{(T)}$ – обратно пропорциональным квадрату частоты $S_\psi \sim 1/f^2$.

При увеличении коэффициента масштабного преобразования у функции распределения $P(\phi^{(T)})$ появляется минимум при нуле, она приобретает характерный бимодальный вид. А функция $P(\psi^{(T)})$ практически не меняется. Для численной характеристики распределения при масштабных преобразованиях используется информационная энтропия [10]:

$$H(\phi^{(T)}) = - \sum_{x_i} P(\phi_i^{(T)}) \log(P(\phi_i^{(T)})). \quad (4)$$

Результаты расчета энтропии огрубленных реализаций в зависимости от коэффициента масштабного преобразования T приведены на рис. 2.

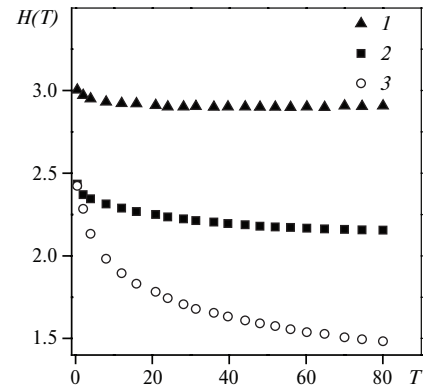


Рис. 2. Энтропия огрубленных реализаций в зависимости от коэффициента масштабного преобразования: 1 – $\psi^{(T)}$; 2 – $\phi^{(T)}$; 3 – белый шум

Для сравнения на этом же рисунке показано изменение энтропии белого шума при таком масштабном преобразовании. Функция $P(\psi^{(T)})$ является масштабно инвариантной, а $P(\phi^{(T)})$ стремится к масштабной инвариантности с ростом T .

4. РЕЛАКСАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С $1/f$ СПЕКТРОМ

Для изучения релаксации системы (1) рассмотрим поведение разностей $\Delta\phi = \phi^\alpha(t) - \phi^\beta(t)$ и $\Delta\psi = \psi^\alpha(t) - \psi^\beta(t)$ функций, соответствующих различным начальным условиям. С помощью численного интегрирования системы (2) были рассмотрены самые различные начальные условия. На рис.3 приведены примеры реализаций случайных процес-

сов $\phi^\alpha(t)$, $\psi^\alpha(t)$ (рис.3а) и $\phi^\beta(t)$, $\psi^\beta(t)$ (рис.3б) с различными начальными условиями. Обнаружилось, что при задании одних и тех же последовательностей гауссовских случайных чисел $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$, случайные процессы $\phi^\alpha(t)$ и $\psi^\alpha(t)$ сходятся к одним и тем же случайным функциям $\phi(t)$ и $\psi(t)$ при любых начальных условиях по истечении некоторого времени τ , т.е. $\Delta\phi(t) \rightarrow 0$, $\Delta\psi(t) \rightarrow 0$, при $t \gg \tau$.

Однако для отдельных реализаций случайного процесса этот переход осуществляется скачком (рис. 3в) и при различных временах. При усреднении релаксации по большому числу реализаций можно получить гладкую релаксационную зависимость $\langle\Delta\phi(t)\rangle$ и $\langle\Delta\psi(t)\rangle$, где угловые скобки обозначают усредненную по различным реализациям зависимость от времени. Типичные усредненные функции $\langle\Delta\phi(t)\rangle$ и $\langle\Delta\psi(t)\rangle$ приведены на рис. 3в. В данном случае использованы следующие расчетные значения параметров системы (2): $\sigma = 0.85$, $\Delta t = 0.15$, число шагов $N = 4000$, начальные условия: $\phi^\alpha(0) = \psi^\alpha(0) = 0.3$, $\phi^\beta(0) = \psi^\beta(0) = 0$. Кривые на рис. 3в получены усреднением по 500 случайным реализациям процесса. А вообще в расчетах релаксации использовались шаги интегрирования от 0.06 до 0.3 при числе шагов интегрирования до 16000 и усреднение до 1000 реализаций. На рис. 3в приведены начальные участки реализаций.

Теперь можно выделить общие черты релаксации при установлении масштабно-инвариантного распределения флуктуаций в случайных процессах с $1/f$ спектром.

Во-первых, после некоторого переходного времени t_0 (см. рис. 3з) система самоорганизуется и для $t > t_0$ усредненная релаксация $\langle\Delta\phi(t)\rangle$ и $\langle\Delta\psi(t)\rangle$ начинает подчиняться простой экспоненциальной форме: $\langle\Delta\phi(t)\rangle \sim \langle\Delta\psi(t)\rangle \sim \exp(-t/\tau)$, где τ – характерное время. Во-вторых, характерное время релаксации τ при установлении масштабно-инвариантного распределения в системе (2) обратно пропорционально квадрату шага интегрирования: $\tau \sim \Delta t^{-2}$ и одно и то же для обоих процессов $\langle\Delta\phi(t)\rangle$ и $\langle\Delta\psi(t)\rangle$. На рис. 4 релаксация $\langle\Delta\phi(t)\rangle$ и $\langle\Delta\psi(t)\rangle$ изображена в полулогарифмических координатах. Оценка времени релаксации дает $\tau \approx 2\Delta t^{-2}$ для использованных шагов интегрирования.

Для достижения стационарности случайного процесса общее время наблюдения t должно быть больше характерного времени нестационарности, т.е. $t \gg \tau_0$.

Общие черты релаксации при установлении масштабно-инвариантного распределения сохраня-

ются не только для малых разностей начальных условий, когда эта разность не больше среднеквадратичного отклонения при установившемся стационарном случайном процессе, но и для больших разностей начальных условий.

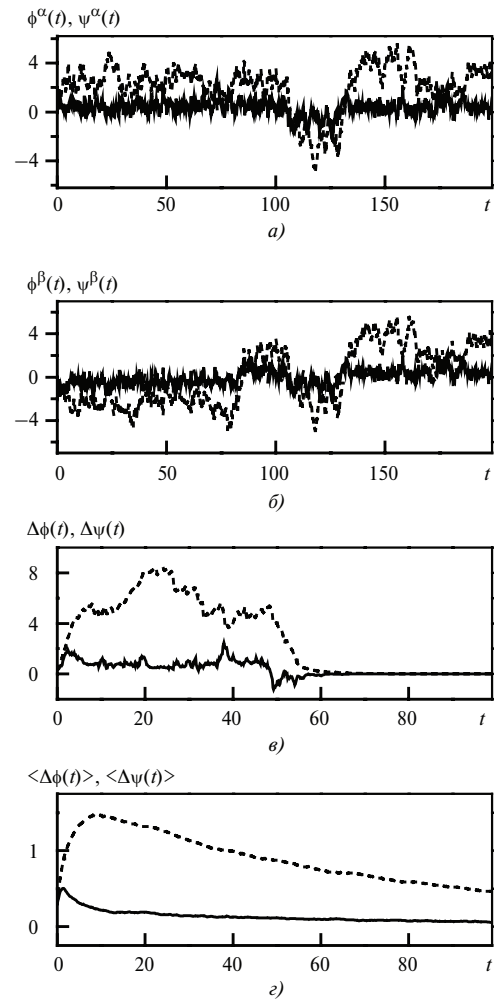


Рис. 3. а, б – примеры реализаций случайных процессов $\phi^\alpha(t)$, $\psi^\alpha(t)$ и $\phi^\beta(t)$, $\psi^\beta(t)$ с различными начальными условиями; в – релаксации отдельных реализаций случайных процессов $\Delta\phi(t)$ и $\Delta\psi(t)$; г – релаксации случайных процессов $\langle\Delta\phi(t)\rangle$ и $\langle\Delta\psi(t)\rangle$, усредненных по ансамблю реализаций; сплошные линии соответствуют процессу $\phi(t)$; пунктирные – процессу $\psi(t)$

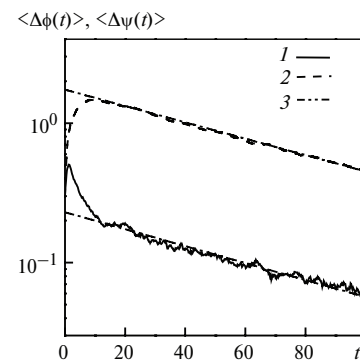


Рис. 4. Релаксации случайных процессов: 1 – $\langle\Delta\phi(t)\rangle$; 2 – $\langle\Delta\psi(t)\rangle$; 3 – зависимость $\sim \exp(-t/\tau)$, при $\tau \approx 2\Delta t^{-2}$

Релаксация $\langle \Delta\phi(t) \rangle$ при больших разностях начальных условий дает новое качественное поведение в переходный период t_0 , т.е. в самом начале релаксации. Если для малых разностей начальных условий $\langle \Delta\phi(t) \rangle$ в начале релаксации может даже несколько возрасть, то для больших разностей начальных условий (порядка среднеквадратичного отклонения стационарного процесса или больше) $\langle \Delta\phi(t) \rangle$ в начальный период $t \leq t_0$ следует степенной зависимости релаксации: $\langle \Delta\phi(t) \rangle \sim t^{-0.5}$.

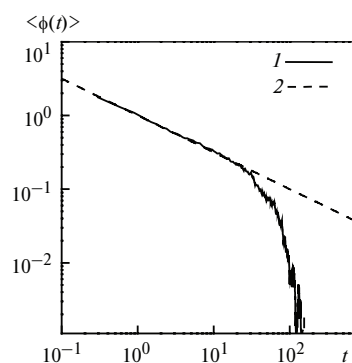


Рис. 5. Релаксация случайного процесса $\langle \Delta\phi(t) \rangle - 1$ для больших разностей начальных условий; 2 – зависимость $\sim t^{-0.5}$

На рис. 5 это продемонстрировано в двойных логарифмических координатах.

Проведенный анализ показывает, как работает система (1), описывающая генерацию $1/f$ флуктуаций при фазовых переходах. Если отклонения параметров ϕ и ψ большие, то основную роль играют детерминированные слагаемые, и система (1) релаксирует соответственно степенной зависимости, как и система без шума [7]. При средних отклонениях переменных ϕ и ψ релаксация имеет экспоненциальную форму зависимости. А вблизи нулевых значений детерминированные слагаемые системы (1) становятся настолько малыми, что в течение нескольких шагов интегрирования эволюция определяется только внешним белым шумом, и система «забывает» начальные условия. И так продолжается до тех пор, пока белый шум не даст большие выбросы параметров ϕ_i и ψ_i . А дальше стадии релак-

сации повторяются. Фактически исследование релаксации на начальной стадии случайного процесса при различных начальных условиях позволяют выделить и определить низкочастотные высокоэнергетические пульсации, которые ответственны за возрастающую часть спектра мощности и которые в теории самоорганизованной критичности [5] называют «лавинами». Для определения таких пульсаций в эксперименте следует проводить огрубляющие масштабные преобразования в наблюдаемых реализациях.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований Отделения ЭММПУ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jensen H.J.** Self-organized criticality. Cambridge UP, NY, 1998.
2. **Колмогоров А.Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР. 1941. Т.30. С. 299–303.
3. **Коган Ш.М.** Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твердых телах // УФН. 1985. Т.145. №.2. С.285–328.
4. **Климонтович Ю.Л.** Статистическая теория открытых систем. М.: ТОО «Янус», 1995.
5. **Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.** Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. № 1. P. 364–374.
6. **$1/f$ noise and self-organized criticality in crisis regimes of heat and mass transfer / V.N. Skokov, A.V. Koverda, A.V. Reshetnikov et al // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2003. V.46. P. 1879–1883.**
7. **Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.** $1/f$ – при неравновесном фазовом переходе. Эксперимент и математическая модель // ЖЭТФ. 1998. Т.113. №.5. С.1748 – 1757.
8. **Коверда В.П., Скоков В.Н.** Самоподстройка критического состояния и $1/f^\alpha$ спектры при фазовых переходах в сосредоточенных системах // Доклады АН. 1999. Т.366. Вып.56. С.752–754.
9. **Коверда В.П., Скоков В.Н.** Индуцированный шумом переход и $1/f$ флуктуации при пересечении неравновесных фазовых переходов // Доклады АН. 2002. Т.386. №2. С.187–189.
10. **Costa M., Goldberger A.L., Peng C.-K.** Multiscale entropy analysis of biological signals // Phys. Rev. E. 2005. V. 71.