

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШАРОВОМ СЛОЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

АННОТАЦИЯ

Проведена серия численных экспериментов по исследованию естественной конвекции в равномерно вращающемся шаровом слое. Предполагалось, что поле тяжести имеет центральную симметрию, а модуль ускорения свободного падения линейно зависит от расстояния до силового центра. В широком диапазоне чисел Грасгофа и Рейнольдса получены различные стационарные решения, обладающие симметрией относительно оси вращения. Для рассмотренных случаев приводятся зависимости интегрального числа Нуссельта от чисел Грасгофа и Рейнольдса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о естественной конвекции во вращающихся шаровых слоях в центральном поле тяжести рассматриваются в геодинимике и астрофизике [1—3]. В частности, большой интерес представляет задача о конвекции в жидком внешнем ядре Земли. Проведение натурных экспериментов, в которых учитывается центральная симметрия поля тяжести, представляется довольно сложной проблемой. В связи с этим весьма актуальным является численное моделирование такого рода задач конвекции. В представленной работе рассматривается модельная задача, в которой учитываются такие реальные условия конвекции во внешнем ядре, как вращение, неоднородное по модулю центральное поле тяжести и характерное для ядра соотношение внутреннего радиуса и толщины шарового слоя.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривалась задача о естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в равномерно вращающемся шаровом слое. Предполагалось, что поле тяжести имеет центральную симметрию, центр шарового слоя совпадает с центром поля тяжести, через который проходит ось вращения z (рис. 1). Границы шарового слоя — изотермические, температура нижней сферы (T_h) выше температуры верхней (T_c). Модуль ускорения свободного падения линейно зависит от расстояния до силового центра:

$$g(r) = \frac{g(r_0 + H) - g(r_0)}{H} (r - r_0) + g(r_0). \quad (1)$$

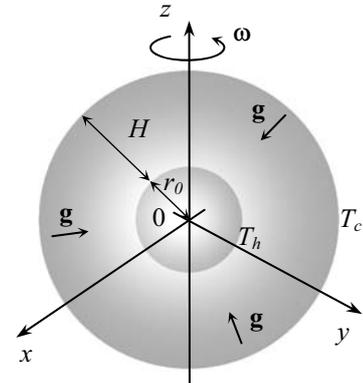


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая постановку задачи (H — толщина слоя, r_0 — радиус внутренней сферы, ω — угловая скорость вращения границ слоя, g — ускорение свободного падения)

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Исследовались стационарные решения с осевой симметрией относительно оси вращения, что позволило исключить из числа независимых переменных угол поворота вокруг оси вращения φ и сделать двумерной расчетную область. Задача решалась в инерциальной системе отсчета, в сферических координатах. В качестве математической модели использовалась система уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска (2)—(6), которая в безразмерной форме может быть записана в виде:

$$(\mathbf{V}\nabla)U = \Delta U - \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{V^2 + W^2}{R} - \frac{2}{R^2} \left(U + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(V \sin\theta)}{\partial\theta} \right) + (\gamma(R-A)+1) \text{Gr} \Phi, \quad (2)$$

$$(\mathbf{V}\nabla)V = \Delta V - \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial\theta} - \frac{UV}{R} + \frac{\text{ctg}\theta}{R} W^2 + \frac{1}{R^2} \left(2 \frac{\partial U}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} V \right), \quad (3)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 U) + \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta V) = 0, \quad (4)$$

$$(\mathbf{V}\nabla)W = \Delta W - \frac{UW}{R} - \frac{VW}{R} \text{ctg}\theta - \frac{1}{R^2} \frac{W}{\sin^2\theta}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + (\mathbf{V}\nabla)\Phi = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta\Phi, \quad (6)$$

здесь $(\mathbf{V}\mathbf{V}) = U \frac{\partial}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}$,

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Граничные условия:

$$\Phi|_{R=A} = 1, \quad \Phi|_{R=A+1} = 0,$$

$$U|_{R=A} = U|_{R=A+1} = 0, \quad V|_{R=A} = V|_{R=A+1} = 0, \quad (7)$$

$$W|_{R=A} = \text{Re } A \sin \theta, \quad W|_{R=A+1} = \text{Re}(A+1) \sin \theta.$$

Безразмерные переменные определялись по формулам:

$$R = \frac{r}{H}; \quad U = \frac{H}{v} v_r; \quad V = \frac{H}{v} v_\theta;$$

$$W = \frac{H}{v} v_\varphi; \quad \Phi = \frac{T - T_c}{\Delta T}; \quad P = \frac{H^2}{\rho_0 v^2} p'. \quad (8)$$

Безразмерные параметры задачи:

$$\text{Gr} = \frac{g(r_0) \beta \Delta T H^3}{v^2}, \quad \text{Re} = \frac{\omega H^2}{v},$$

$$\text{Pr} = \frac{v}{\alpha}, \quad A = \frac{r_0}{H}, \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{g(r_0 + H) - g(r_0)}{g(r_0)}.$$

Интегральное и относительное числа Нуссельта определялись по формулам:

$$\overline{\text{Nu}} = \int_S \left(-\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) dS, \quad (10)$$

где S — верхняя или нижняя граница шарового слоя,

$$N = \frac{\overline{\text{Nu}}}{\overline{\text{Nu}}|_{\text{Gr}=0}}. \quad (11)$$

Среднее по области число Грасгофа

$$\overline{\text{Gr}} = \frac{1}{V_D} \int_D \text{Gr}(\gamma(R-A)+1) dV, \quad (12)$$

где D — шаровой слой; V_D — объем шарового слоя.

Результаты численных экспериментов при наличии вращения удобно интерпретировать в системе отсчета, равномерно вращающейся с безразмерной угловой скоростью, равной числу Рейнольдса. В частности, в этой системе отсчета компонента скорости W' вдоль координатной линии φ определяется следующим образом:

$$W' = W - \text{Re } R \sin \theta. \quad (13)$$

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численно задача решалась методом контрольного объема с алгоритмом SIMPLER для уравнений гидродинамики [4]. Расчеты проводились на сетке: 82 расчетные точки по радиусу и 242 по углу, в некоторых случаях использовались более подробные сетки со сгущениями у границ слоя.

Проведены три серии численных экспериментов по исследованию естественной конвекции в шаровом слое, в которых варьируемыми параметрами являлись числа Грасгофа и Рейнольдса. Аспектное отношение, число Прандтля и параметр γ , характеризующий степень неоднородности модуля поля тяжести, фиксировались: $A = 0.54$, $\text{Pr} = 1$, $\gamma = 16.7$. При таких значениях A и γ среднее по области число Грасгофа определяется соотношением

$$\overline{\text{Gr}} \approx 11.8 \text{Gr}.$$

В первой серии расчетов вращение отсутствовало и рассматривалась эволюция стационарных решений в зависимости от числа Грасгофа. Решения получались методом продолжения по параметру, т.е. в данном случае по числу Грасгофа. Конвекция начиналась приблизительно при $\text{Gr} = 10^3$. Полученные типы решений представлены на рис. 2—4. Качественно типы решений могут быть классифицированы по количеству областей с восходящим течением. В рамках этой классификации решения, представленные на рис. 2, 4, принадлежат одному типу. Результаты расчетов показывают, что при отсутствии вращения возможно существование, по крайней мере, двух различных типов стационарных решений с осевой симметрией при одном и том же числе Грасгофа. Например, при $\text{Gr} = 10^5$ получены решения двух различных типов, которые представлены на рис. 3, 4. Интегральные тепловые потоки, соответствующие разным типам решений, при одном и том же числе Грасгофа отличаются незначительно. Зависимость относительного числа Нуссельта от среднего по области числа Грасгофа представлена на рис. 5. При числах Грасгофа выше $2.8 \cdot 10^5$ стационарных решений получить не удалось.

Следующая серия численных экспериментов проводилась при $\text{Re} = 50$. Число Грасгофа варьировалось. Все решения, полученные в данной серии расчетов, имеют вид, представленный на рис. 6. Таким образом, в данном случае вращение снимает вырождение стационарных решений, т.е. каждому числу Грасгофа соответствует одно стационарное решение. Хотя структура течения в сечении по полярному углу φ практически не изменяется (рис. 6, б), в целом течение приобретает сложную трехмерную структуру.

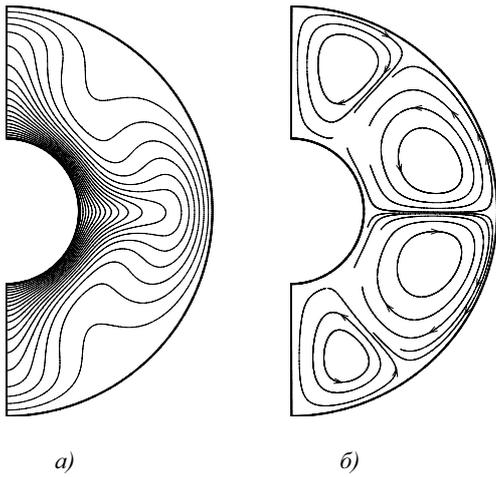


Рис. 2. Поле температуры (а), структура течения в сечении по φ (б) ($Gr = 10^3$, $Re = 0$)

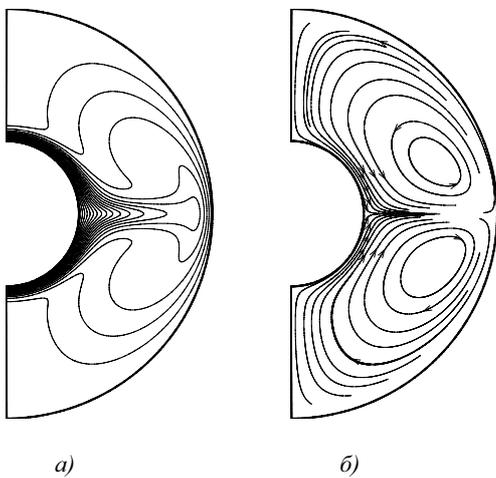


Рис. 3. Поле температуры (а), структура течения в сечении по φ (б) ($Gr = 10^4$, $Re = 0$)

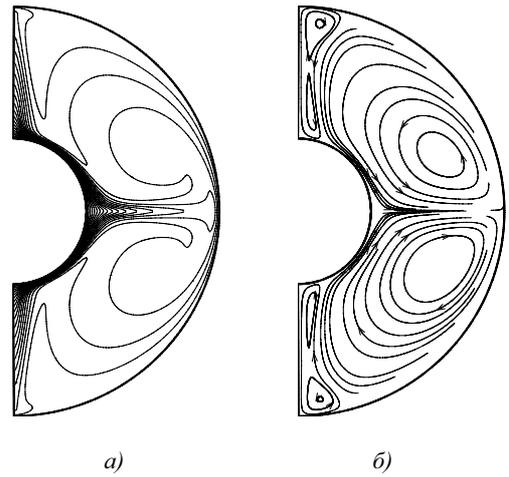


Рис. 4. Поле температуры (а), структура течения в сечении по φ (б) ($Gr = 10^5$, $Re = 0$)

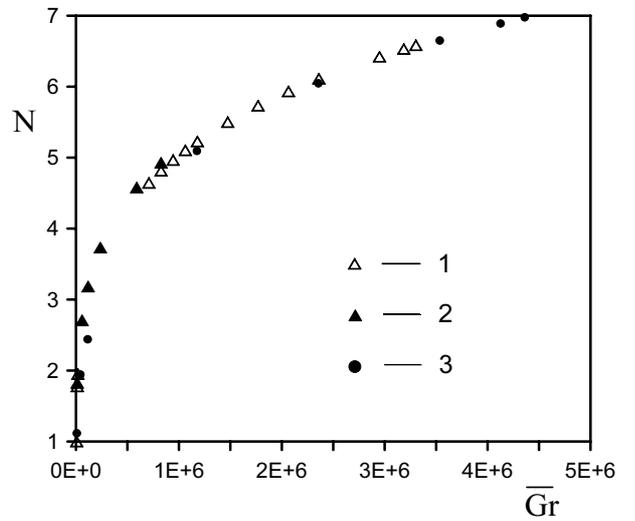


Рис. 5. Зависимость относительного числа Нуссельта N (11) от среднего по области числа Грасгофа \overline{Gr} (12): 1 — для решений типа рис. 2, 4 при $Re = 0$; 2 — для решений типа рис. 3 при $Re = 0$; 3 — для решений типа рис. 6 при $Re = 50$

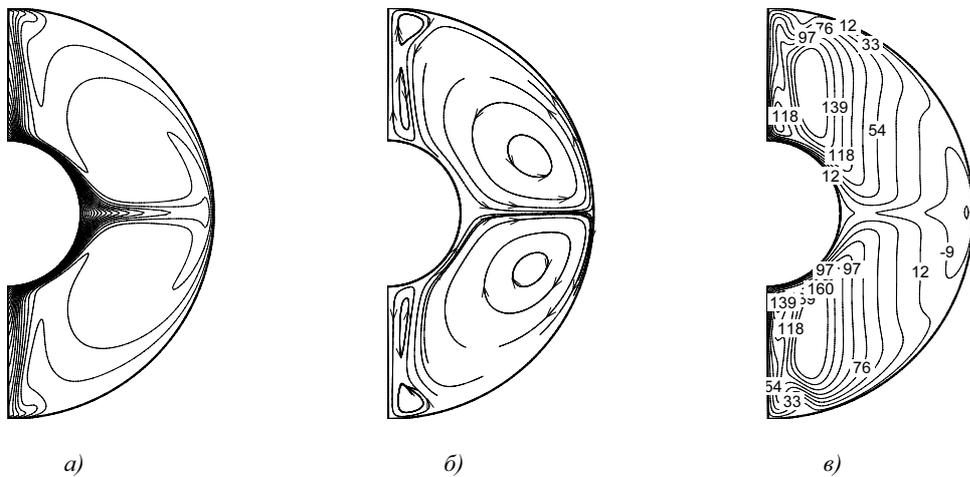


Рис. 6. Поле температуры (а), структура течения (б), компонента скорости W' (13) вдоль координатной линии φ в сечении по φ (в) ($Gr = 10^5$, $Re = 50$)

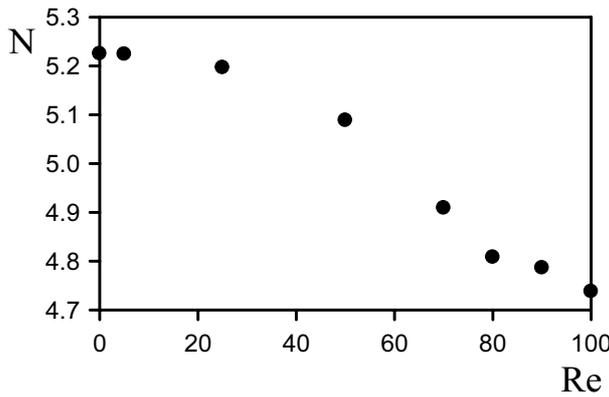


Рис. 7. Зависимость относительного числа Нуссельта N (11) от числа Рейнольдса Re ($Gr = 10^5$)

В равномерно вращающейся системе отсчета, в которой границы шарового слоя покоятся, поток жидкости закручивается против направления вращения в области «экватора» ($\theta = \pi/2$) вблизи внешней границы (рис. 6, в). В остальной части шарового слоя поток жидкости закручен по направлению вращения системы отсчета. Зависимость относительного числа Нуссельта от среднего по области числа Грасгофа представлена на рис. 5. Поскольку значение числа Рейнольдса невелико, зависимость $N(Gr)$ практически такая же, как при $Re = 0$. Наибольшее значение Gr , при котором в данном случае удалось получить стационарное решение $3.7 \cdot 10^5$, что приблизительно на 30% больше, чем аналогичное значение при отсутствии вращения. Это показывает, что при малых числах Рейнольдса, т.е. когда влияние центробежной силы незначительно, вращение стабилизирует течение.

Результаты третьей серии расчетов демонстрируют эволюцию стационарных решений в зависимости от числа Рейнольдса при фиксированном числе Грасгофа ($Gr = 10^5$). Все решения данной серии имели тип, представленный на рис. 6. По мере увеличения числа Рейнольдса размеры вихрей, расположенных вблизи оси вращения, увеличивались. Максимальное значение числа Рейнольдса, при котором было получено стационарное решение, 100. Суммарный тепловой поток уменьшается при увеличении числа Рейнольдса (рис. 7). Это связано с тем, что при увеличении числа Рейнольдса усиливается влияние центробежной силы. Центробежная сила в свою очередь ослабляет гравитацию, особенно в областях вблизи «экватора» ($\theta = \pi/2$). Суммарное силовое поле, которое складывается из гравитации и центробежной силы, при достижении некоторого числа Рейнольдса (в данном случае при $Re = 110$) становится сильно неоднородным, и, как следствие этого, конвекция становится нестационарной. При больших числах Рейнольдса (в данном случае при $Re = 3000$) конвекция прекращается, поскольку центробежная сила полностью компенсирует гравитацию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В достаточно широком диапазоне чисел Грасгофа и Рейнольдса получены стационарные решения задачи о естественной конвекции в равномерно вращающемся шаровом слое. Установлено, что вращение снимает вырождение стационарных решений. При достаточно больших числах Рейнольдса конвекция становится нестационарной. Для всех рассмотренных случаев получены зависимости интегрального числа Нуссельта от чисел Грасгофа и Рейнольдса.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- A — аспектное отношение (9);
- $g(r)$ — модуль ускорения свободного падения, m/c^2 ;
- Gr — число Грасгофа (9);
- H — толщина шарового слоя, м;
- \overline{Nu} — интегральное число Нуссельта (10);
- N — относительное число Нуссельта (11);
- p — давление, N/m^2 ;
- p' — отклонение от гидростатического давления p_0 , вызванное конвекцией, ($p = p_0 + p'$), N/m^2 ;
- Pr — число Прандтля (9);
- Re — число Рейнольдса (9);
- r — расстояние от центра шарового слоя, м;
- T — температура, К;
- ΔT — характерная разность температур ($\Delta T = T_h - T_c$), К;
- v_r — радиальная компонента скорости, м/с;
- v_θ — компонента скорости вдоль координатной линии θ , м/с;
- v_φ — компонента скорости вдоль координатной линии φ , м/с;
- α — коэффициент температуропроводности, m^2/c ;
- β — коэффициент объемного расширения, K^{-1} ;
- γ — безразмерный параметр, характеризующий степень неоднородности модуля поля тяжести (9);
- θ — угол между радиус-вектором точки и осью вращения Oz ;
- φ — угол вращения вокруг оси Oz ;
- ν — кинематическая вязкость, m^2/c ;
- ρ — плотность, kg/m^3 ;
- ω — угловая скорость вращения, c^{-1} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яворская И.М., Беляев Ю.Н. Конвективные течения во вращающихся слоях // Механика жидкости и газа. Т. 17. М.: ВИНТИ (Итоги науки и техники), 1982. С. 3—85.
2. Кирдяшкин А.Г., Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.А. Турбулентная конвекция и магнитное поле внешнего ядра Земли // Геология и геофизика. 2000. Т. 41. № 5. С. 601—612.
3. Аглонов С.В. Геодинамика. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 360 с.
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.