УДК 532.5

*М.В. Богданова*[1], *Л.С. Миловская*[1], *А.Ю. Трошин*[2]

Воронежский государственный педагогический университет, Россия (1)
Воронежский государственный технический университет, Россия (2)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЗАМКНУТЫХ СОСУДАХ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

**АННОТАЦИЯ**
В работе предлагается модель процесса тепломассообмена в цилиндрической емкости с полусферическими днищами. полностью заполненной жидкостью. Высота цилиндра предполагается переменной, что позволяет изучать процесс при различных формах емкости.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных изучению процессов тепломассопереноса в условиях конвективного теплообмена. Широко известна научная школа В.И.Полежаева, деятельность которой направлена на решение задачи наиболее адекватного описания процессов естественной конвекции, происходящих в емкостях различной геометрической конфигурации. Это, в первую очередь, сфера, вертикально расположенный цилиндр с плоскими и полусферическими днищами. Такая геометрия обусловлена преимущественно потребностями ракетно-космической и авиационной промышленности, так как топливные баки и емкости для хранения криогенных жидкостей имеют в первую очередь именно такую форму [1].

В качестве математического аппарата используется система Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Наиболее популярными для численного счета являются методы конечных разностей и конечных элементов. В работах варьируются размеры баков, проводятся расчеты при различных числах Грасгофа, различных подводах тепла, а также возможных степенях заполнения емкостей исследуемой жидкостью.

Кроме того, используются различные виды оболочек, термоизоляционных материалов, применяются различные способы охлаждения. Все эти условия находят свое отражение в предлагаемых компьютерных моделях. Результаты численных экспериментов представляют собой тепловые поля и поля течений как внутри исследуемых областей, так и в их оболочках, что дает возможность для более эффективного проектирования и создания емкостей для хранения и транспортировки авиационного и ракетного топлива.

Имеются работы, в которых предлагается модель расчета для горизонтально расположенного цилиндра, а также для цилиндра с осью, наклоненной под заданным углом [2].

Несмотря на обилие работ, в которых исследуется поведение жидкостей, задача создания оптимальных условий для хранения криогенных жидкостей по-прежнему остается актуальной.

В связи с этим требуются более рациональные и адекватные компьютерные модели, позволяющие по изменению выбранных параметров получать соответствующие поля течений и температур.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В УСЛОВИЯХ КОНВЕКЦИИ В СОСУДАХ РАЗЛИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ

### 2.1. Физическая постановка задачи

Рассматривается замкнутый сосуд цилиндрической формы с полусферическими днищами и переменной образующей $h$, а также сферическая область при $h = 0$. Сосуд, полностью заполненный жидкостью, подвергается постоянному тепловому воздействию.

Физические свойства жидкости и оболочек не зависят от температуры, а поля течений и температур осесимметричны. Бак имеет цилиндрический радиус $R$. Стенка считается термически тонкой, т.е. изменение температуры поперек стенки считается пренебрежимо малым. Необходимо определить тепловое поле и поле течения внутри емкости, то есть результат конвекционного процесса.

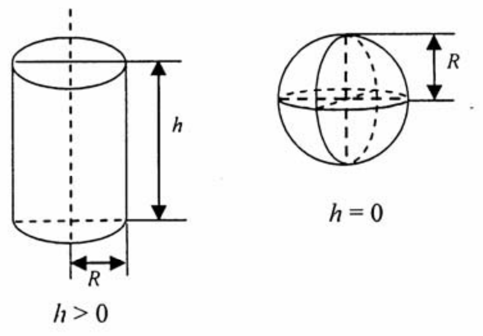


Рис. 1. Исследуемая емкость

## 2.2. Математическая постановка задачи

Конвекционное течение и теплообмен внутри бака описываются двумерными нестационарными уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска в цилиндрической системе координат.

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+U\frac{\partial\theta}{\partial r}+V\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{\Pr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right]. \qquad (1)$$

Уравнения движения:

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}+U\frac{\partial U}{\partial r}+V\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{U}{r^2}= =-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}+U\frac{\partial V}{\partial r}+V\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{U}{r^2}= =-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+f. \qquad (3)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}+\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{U}{r}=0, \qquad (4)$$

где $f$ – внешняя сила; $U$, $V$ – проекции скорости на $r$ и $\varphi$; $\theta$ – безразмерная температура.

Граничными условиями являются

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_{\Gamma}=q, \qquad (5)$$

где $q$ – внешний тепловой поток; $\Gamma$ – граница области,

$$U|_{\Gamma}=V|_{\Gamma}=0. \qquad (6)$$

При $r=0$ действует условие ограниченности решения $\left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=0}=0$, $\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=0}=0$, $\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=0}=0$. (7)

Начальными условиями являются

$$\theta|_{t=0}=\theta_0. \qquad (8)$$

$$U|_{t=0}=V|_{t=0}=0.$$

Расчеты производятся для следующих значений констант $Gr=10^4$ (Грасгофа), $\Pr=1$ (Прандтля), $R=1$.

## 2.3. Сеточный метод решения системы

Разобьем полуокружность на $2n$ частей. Спроектируем точки разбиения по $\varphi$ на оси $z$ и r. См. рис. 1.

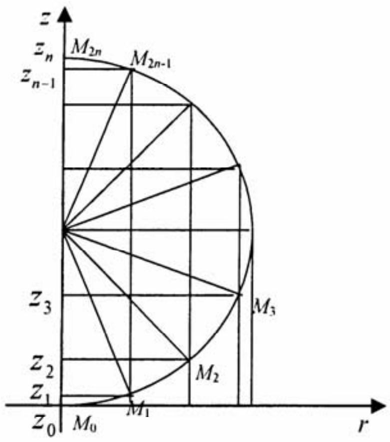


Рис. 1. Сетка на полусфере

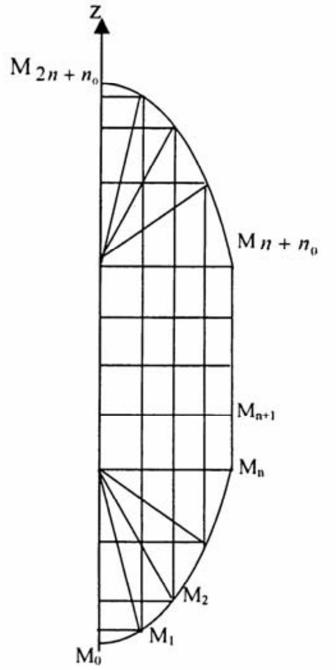


Рис. 2. Сетка в сферическо-цилиндрической области

Спроектируем точки $M_0$, $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$ на оси $Or$ и $Oz$. Таким образом, на оси $Or$ получилось $n+1$ точка – $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$, а на оси $Oz$ $2n+1$ точка – $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$.

Обозначим $n_0$ – количество разбиений оси z в цилиндрической части емкости, тогда шаги по координатам определяются следующим образом:

$\Delta r_i=r_{i+1}-r_i$, $i=0, 1, \ldots, n-1$;

$$\Delta z_j = \begin{cases} z_{j+1} - z_j, j = 0, 1, \ldots, n-1, j = n+n_0, n+n_0+1, \ldots, 2n-1, \\ \dfrac{h}{n_0}, j = n, n+1, \ldots, n+n_0-1; \end{cases}$$

$$r_i = R\sin\frac{i\pi}{2n},\ i = 0,1,..n;$$

а) $z_j = R - R\cos\dfrac{j\pi}{2n},\ j = 0,1...n$ ;

б) $z_j = R + (j-n)\cdot\dfrac{h}{n_0},\ j = n+1,..n+n_0$ ;

в) $z_j = R + h + R\sin\left(\dfrac{(j-(n+n_0))\pi}{2n}\right)$, где

$j = n+n_0+1,.,2n+n_0$.

Получим следующую разностную аппроксимацию системы (1)-(8):

$$\frac{\theta^{k+1}_{i,j} - \theta^k_{i,j}}{\Delta\tau} + U^k_{i,j}\frac{\theta^k_{i+1,j} - \theta^k_{i,j}}{\Delta r_i} + V^k_{i,j}\frac{\theta^k_{i,j+1} - \theta^k_{i,j}}{\Delta z_j} =$$

$$= \frac{1}{\Pr}\left[\frac{1}{r_i}\cdot\frac{\theta^k_{i+1,j} - \theta^k_{i,j}}{\Delta r_i} + \right.$$

$$+ \frac{\theta^k_{i+1,j}\Delta r_{i-1} - \theta^k_{i,j}(\Delta r_{i-1} + \Delta r_i) + \theta^k_{i-1,j}\Delta r_i}{\Delta r^2_i\ \Delta r_{i-1}} +$$

$$\left. + \frac{\theta^k_{i,j+1}\Delta z_{j-1} - \theta^k_{i,j}(\Delta z_{j-1} + \Delta z_j) + \theta^k_{i,j-1}\Delta z_j}{\Delta z^2_j\ \Delta z_{j-1}}\right]; \qquad (9)$$

$$\frac{U^{k+1}_{i,j} - U^k_{i,j}}{\Delta\tau} + U^k_{i,j}\frac{U^k_{i+1,j} - U^k_{i,j}}{\Delta r_i} + V^k_{i,j}\frac{U^k_{i,j+1} - U^k_{i,j}}{\Delta z_j} + \frac{U^k_{i,j}}{r^2_i} =$$

$$= -\frac{\left(P^k_{i+1,j} - P^k_{i,j}\right)}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Pr}\frac{U^k_{i+1,j} - U^k_{i,j}}{\Delta r_i} +$$

$$+ \frac{U^k_{i-1,j}\Delta r_{i-1} - U^k_{i,j}(\Delta r_{i-1} + \Delta r_i) + U^k_{i-1}\Delta r_i}{\Delta z^2_j\ \Delta z_{j-1}} +$$

$$+ \frac{U^k_{i,j+1}\Delta z_{j-1} - U^k_{i,j}(\Delta z_{j-1} + \Delta z_j) + U^k_{i,j-1}\Delta z_j}{\Delta z^2_j\Delta z_{j-1}}; \qquad (10)$$

$$\frac{V^{k+1}_{i,j} - V^k_{i,j}}{\Delta\tau} + U^k_{i,j}\frac{V^k_{i+1,j} - V^k_{i,j}}{\Delta r_i} + V^k_{i,j}\frac{V^k_{i,j+1} - V^k_{i,j}}{\Delta z_j} =$$

$$= -\frac{\left(P^k_{i,j+1} - P^k_{i,j}\right)}{\Delta r_j} + \frac{1}{r_i}\frac{V^k_{i+1,j} - V^k_{i,j}}{\Delta r_i} +$$

$$\frac{V^k_{i-1,j}\Delta r_{i-1} - V^k_{i,j}(\Delta r_{i-1} + \Delta r_i) + V^k_{i-1}\Delta r_i}{\Delta r^2_i\Delta r_{i-1}} +$$

$$+ \frac{V^k_{i,j+1}\Delta z_{j-1} - V^k_{i,j}(\Delta z_{j-1} + \Delta r_j) + V^k_{i-1}\Delta r_i}{\Delta z^2_j\Delta z_{j-1}} + f^k_{i,j}; \qquad (11)$$

$$\frac{V^k_{i+1,j} - U^k_{i,j}}{\Delta r_i} + \frac{V^k_{i,j+1} - V^k_{i,j}}{\Delta z_j} + \frac{U^k_{i,j}}{r_i} = 0, \qquad (12)$$

где $i = 1...n-1,\ j = i+1...\ 2n+n_0-1$.

Построим разностные уравнения в граничных точках области.

а) Для точек $z \geq R+h$ имеем следующий вид граничного условия:

$$\frac{\theta_{i,i} - \theta_{i-1,i}}{\Delta r_{i-1}}\cdot\frac{r_i}{R} + \frac{\theta_{i,i} - \theta_{i,i-1}}{\Delta z_{i-1}}\cdot\frac{z_i - R}{R} = q, i = 0,1,..,n; \qquad (13)$$

б) Для точек $z \leq R$.

$$\frac{\theta_{i,2n-i} - \theta_{i-1,2n-i}}{\Delta r_{i-1}}\cdot\frac{r_i}{R} + \frac{\theta_{i,2n-i+1} - \theta_{i,2n-i}}{\Delta z_{2n-i}}\cdot\frac{Z_{2n-i} - R}{R} = q; \qquad (14)$$

в) Если $R < Z < R+h$

$$\frac{\theta_{n,j} - \theta_{n-1,j}}{\Delta r_{n-1}} = q, \qquad (15)$$

где $j = n...n+n_0$.

На оси $z$ имеем $U_{0,j} = U_{1,j}$, $V_{0,j} = V_{1,j}$, $\theta_{0,j} = \theta_{1,j}$, где $j = 1...2n+n_0-1$.

$$U_n = V_n = 0$$
$$\theta_0 = U_0 = V_0 = 0. \qquad (16)$$

## 3. Алгоритм расчета теплового поля и поля течений

1. Определяются $r_i$, $z_j$, $dr_i$, $dz_j$ и $\Delta t$ из условия устойчивости

$$\Delta\tau \leq \frac{\min(\Delta r^2, \Delta z^2)}{4\left(\dfrac{1}{\Pr}\right)}. \qquad (17)$$

2. Задаются начальные значения

$\theta^{(0)}_{i,j}$, $U^{(0)}_{i,j}$, $V^{(0)}_{i,j}$, $P^{(0)}_{i,j}$.

3. На каждом шаге по $\Delta\tau$ находим из уравнения (9) $\theta_{i,j}$. Затем из уравнения (10) $U_{i,j}$. Из уравнения (11) $V_{i,j}$.

4. Из уравнений (13)-(16) находим $\theta_{i,j}$ на границе.

5. Пользуясь уравнением неразрывности, проверяем условия его выполнения (12) для $U_{i,j}$ и $V_{i,j}$. Если они не удовлетворяют данному условию, то происходит уточнение данных значений с помощью уточнения $P_{i,j}$ и нахождение нужного значения $P_{i,j}$ для данного $\tau = k\Delta\tau$.

Таким образом, получаем тепловое поле, поле течений внутри емкости, а также на границе.

## 4. Анализ результатов

Расчет проводился для значений h в диапазоне от 0 до 1 с шагом 0.1, $n_0 = 4, n = 4$.

Анализируя результаты, можно видеть, что для различной геометрической формы меняется характер зависимости температуры и проекции скорости $V$ от времени. Рассматриваются три фиксированные точки ($\theta_1$ в верхней полусфере, $\theta_3$ в нижней полусфере и $\theta_2$ в цилиндрической части). При этом наблюдается различный вид графиков зависимости $\theta$ и $V$ от температуры в этих точках. Это видно на следующих графиках (рис. 3).

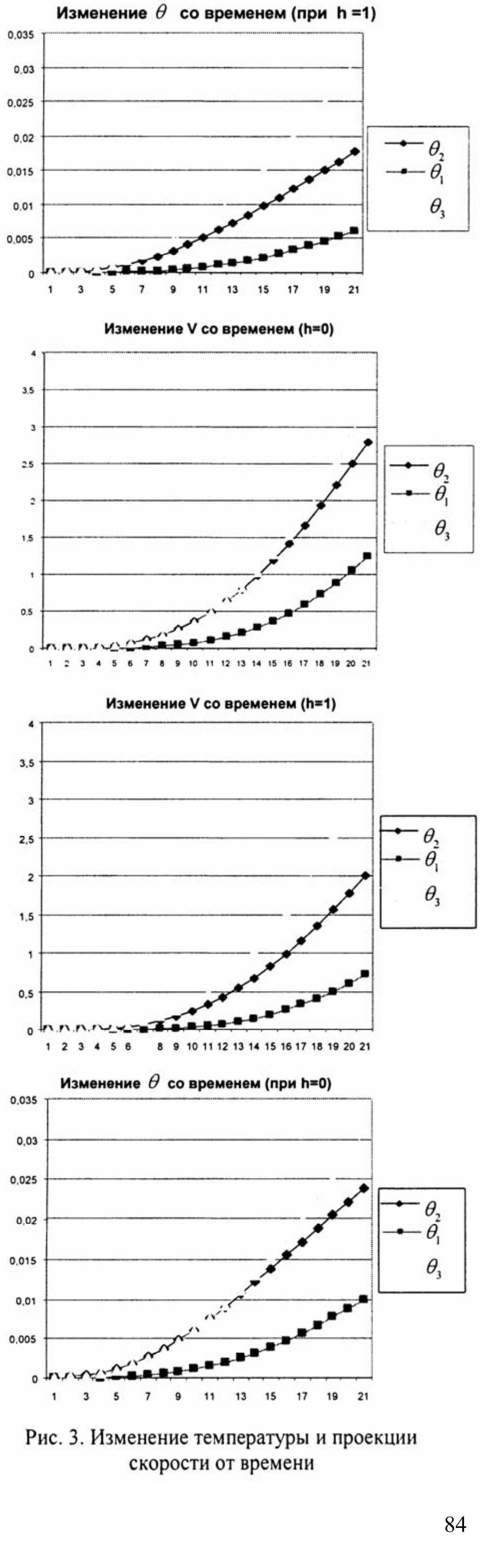


Рис. 3. Изменение температуры и проекции скорости от времени

Результат при $h = 0$ на сетке $10 \times 20$ согласуется с результатами, проведенными в [1].

Предлагаемая в данной работе компьютерная модель может вполне успешно использоваться на анализе условий и материалов для конструирования топливных баков и емкостей по хранению криогенных жидкостей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вальциферов Ю.В., Полежаев В.И.** Конвективный теплообмен и температурное расслоение в сфере, полностью заполненной жидкостью при заданном потоке тепла. Механика жидкости и газа. –№3, 1975.

2. **Богданова М.В., Фалеев В.В.** Расчет термогидродинамических параметров в цилиндрическом баке при различных положениях оси / Труды III Российской национальной конференции по теплообмену. М., 2002.