УДК 669.86:536.21

Г.В. Кузнецов[1], *М.А. Шеремет*[2]

Томский политехнический университет, Россия (1)
Томский государственный университет, Россия (2)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Представлены результаты исследования пространственного сопряженного конвективно–кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме с двумя локальными источниками тепловыделения в условиях конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних граней области решения. Получены пространственные распределения гидродинамических параметров и температур, характеризующие основные закономерности рассматриваемого процесса. Установлены масштабы взаимного влияния конвективного теплопереноса в газовой фазе и кондуктивного теплопереноса в элементах твердой фазы.

1. ВВЕДЕНИЕ

При комплексном анализе процессов сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в областях с большим числом геометрических и теплофизических параметров необходимо использовать математическую постановку, учитывающую теплоперенос как в элементах конденсированной фазы (ограждающие конструкции), так и в самой газовой полости [1]. Подобные задачи представляют собой практический интерес (газовые турбины, топливные системы летательных аппаратов, теплообменники и др.).

В современной научной литературе результаты решения сопряженных задач конвективно-кондуктивного теплопереноса в пространственной постановке не представлены. Известны решения, связанные с моделированием отдельно пространственных конвективных течений, пространственного кондуктивного теплопереноса.

Целью данной работы является математическое моделирование нестационарного процесса сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в объекте, представляющем собой замкнутый объем с локальными источниками тепловыделения и неоднородными граничными условиями.

Используемый метод решения был протестирован на модельной задаче. Рассматривалась естественная конвекция в замкнутом кубе, одна грань которого имеет максимальную температуру, противоположная грань – минимальную температуру, температура на остальных гранях изменяется по линейному закону. Сравнение полученных результатов с данными других авторов [2] показало достаточно хорошее соответствие.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается краевая задача сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса для области, представленной на рис. 1.

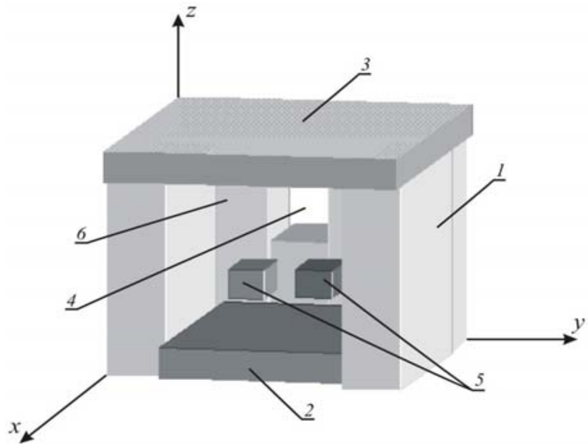

Рис. 1. Область решения рассматриваемой задачи: *1–4* – элементы твердой фазы; *5* – локально сосредоточенные источники тепловыделения; *6* – газовая фаза

Область решения включает 13 подобных по форме параллелепипедов, имеющих разные размеры и различные теплофизические характеристики. На границах между всеми параллелепипедами и на границах с внешней по отношению к рассматриваемому объекту средой выставлялись граничные условия, характеризующие процессы подвода или отвода энергии.

Температура на источниках тепловыделения принимается постоянной в течение всего процесса. Горизонтальные ($z = 0$, $z = H$) и вертикальные ($x = L_x$; $y = 0$ $y = L_y$,) стены заданной толщины, образующие газовую полость, предполагаются теплоизолированными с наружной стороны. На внешней границе одной из стен ($x = 0$) осуществляется конвективно-радиационный теплообмен с окружающей средой.

При проведении анализа предполагается, что теплофизические свойства ограждающей конструкции и воздуха не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Воздух считается ньютоновской жидкостью, несжимаемой и удовлетворяющей приближению Буссинеска [3]. Движение газовой фазы и теплоотдача во внутреннем объеме принимаются пространственными, теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенами – пренебрежимо малым по сравнению с конвективным теплообменом, газ – абсолютно прозрачным для теплового излучения.

В такой постановке процесс переноса тепла в рассматриваемой области (рис. 1) описывается системой нестационарных пространственных уравнений конвекции в приближении Буссинеска для газовой фазы [3] и уравнением теплопроводности для твердой фазы с нелинейными граничными условиями.

Математическая модель, соответствующая сформулированной физической постановке, рассматривалась в безразмерных переменных.

В качестве масштаба расстояния выбрана длина газовой полости рассматриваемой области решения по оси x. Для приведения к безразмерному виду системы уравнений использовались следующие соотношения:

$$X=\frac{x}{L_x},\ \ Y=\frac{y}{L_x},\ \ Z=\frac{z}{L_x},\ \ \tau=\frac{t}{t_0},$$

$$U=\frac{u}{V_0},\ \ V=\frac{v}{V_0},\ \ W=\frac{w}{V_0},\ \ \Theta=\frac{T-T_0}{T_{\text{и.т}}-T_0},$$

где $V_0=\sqrt{g_z\beta\left(T_{\text{и.т}}-T_0\right)L_x}$.

Моделирование процесса конвективного теплопереноса в газовой фазе рассматривалось на основе переменных [4]:

- векторный потенциал

$$\vec{\psi}=\psi_x\vec{i}+\psi_y\vec{j}+\psi_z\vec{k},$$

удовлетворяющий уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

при этом

$$\vec{\mathrm{V}}=\mathrm{rot}\vec{\psi};$$

- вектор завихренности скорости

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{\mathrm{V}}.$$

Для обезразмеривания основных переменных – векторный потенциал и вектор завихренности – использовались следующие соотношения:

$$\Psi_x=\frac{\psi_x}{\psi_0},\ \ \Psi_y=\frac{\psi_y}{\psi_0},\ \ \Psi_z=\frac{\psi_z}{\psi_0},\ \ \psi_0=V_0L;$$

$$\Omega_x=\frac{\omega_x}{\omega_0},\ \ \Omega_y=\frac{\omega_y}{\omega_0},\ \ \Omega_z=\frac{\omega_z}{\omega_0},\ \ \omega_0=\frac{V_0}{L}.$$

Безразмерные уравнения Буссинеска в переменных “векторный потенциал – вектор завихренности – температура” для рассматриваемой задачи имеют вид:

- для газовой фазы (рис. 1)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial\Omega_x}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Omega_x}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega_x}{\partial Y}+W\frac{\partial\Omega_x}{\partial Z}-\Omega_x\frac{\partial U}{\partial X}-\\&-\Omega_y\frac{\partial U}{\partial Y}-\Omega_z\frac{\partial U}{\partial Z}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Gr}}}\Delta\Omega_x+\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial Y},\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial\Omega_y}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Omega_y}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega_y}{\partial Y}+W\frac{\partial\Omega_y}{\partial Z}-\Omega_x\frac{\partial V}{\partial X}-\\&-\Omega_y\frac{\partial V}{\partial Y}-\Omega_z\frac{\partial V}{\partial Z}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Gr}}}\Delta\Omega_y-\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial X},\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial\Omega_z}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Omega_z}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega_z}{\partial Y}+W\frac{\partial\Omega_z}{\partial Z}-\Omega_x\frac{\partial W}{\partial X}-\\&-\Omega_y\frac{\partial W}{\partial Y}-\Omega_z\frac{\partial W}{\partial Z}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Gr}}}\Delta\Omega_z,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\Delta\Psi_x=-2\cdot\Omega_x,\tag{4}$$

$$\Delta\Psi_y=-2\cdot\Omega_y,\tag{5}$$

$$\Delta\Psi_z=-2\cdot\Omega_z,\tag{6}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Ho}}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Theta}{\partial X}+V\frac{\partial\Theta}{\partial Y}+W\frac{\partial\Theta}{\partial Z}=\frac{1}{\mathrm{Pr}\sqrt{\mathrm{Gr}}}\Delta\Theta;\tag{7}$$

- для твердой фазы

$$\frac{\partial\Theta_i}{\partial\mathrm{Fo}_i}=\Delta\Theta_i,\ i=\overline{1,4}.\tag{8}$$

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1)–(8) имеют вид:

начальные условия:

$$\Psi_x\left(X,Y,Z,0\right)=0,$$

$$\Psi_y\left(X,Y,Z,0\right)=0,$$

$$\Psi_z\left(X,Y,Z,0\right)=0,$$

$$\Omega_x\left(X,Y,Z,0\right)=0,$$

$$\Omega_y\left(X,Y,Z,0\right)=0,$$

$$\Omega_z\left(X,Y,Z,0\right)=0,$$

$\Theta\left(X,Y,Z,0\right)=0$, за исключением источников тепловыделения, на которых во все время процесса $\Theta=1$;

граничные условия:

- на границе, разделяющей внешнюю среду и рассматриваемую область, записываются граничные условия, отражающие теплообмен за счет конвекции и излучения рассматриваемого объема с внешней средой,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Theta_i(X,Y,Z,\tau)}{\partial X}=\mathrm{Bi}_i\cdot\Theta_i(X,Y,Z,\tau)+\\&+\mathrm{Bi}_i\cdot\frac{T_0-T_{\text{о.с}}}{T_{\text{и.т}}-T_0}+Q_i,\end{aligned}$$

$$Q_i=\mathrm{N}_i\cdot\left[\begin{aligned}&\left(\Theta_i(X,Y,Z,\tau)+\frac{T_0}{T_{\text{и.т}}-T_0}\right)^4-\\&-\left(\frac{T_{\text{о.с}}}{T_{\text{и.т}}-T_0}\right)^4\end{aligned}\right],$$

где $i=1,\ 3,\ 4$;

- на всех внешних границах рассматриваемой области кроме границы, на которой осуществляется теплообмен с внешней средой, заданы условия теплоизоляции

$$\frac{\partial \Theta_i(X,Y,Z,\tau)}{\partial X^k} = 0 \text{, где } \begin{matrix} i = \overline{1,3}, \\ k = \overline{1,3}; \end{matrix}$$

- на всех участках области решение, где происходит сопряжение материалов с различными теплофизическими параметрами, заданы условия 4-го рода

$$\begin{cases} \Theta_i = \Theta_j \\ \dfrac{\partial \Theta_i}{\partial X^k} = \lambda_{j,i} \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial X^k} \end{cases} \text{, где } \begin{matrix} i, j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6;\ \ i \neq j, \\ k = \overline{1,3}; \end{matrix}$$

- на внутренних границах твердой фазы и воздушной, параллельных плоскости *XZ*,

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} = \Psi_z = 0,$$

$$\begin{cases} \Theta_1 = \Theta_2, \\ \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = \lambda_{2,1} \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial Y}; \end{cases}$$

- на внутренних границах твердой фазы и воздушной, параллельных плоскости *YZ*,

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial X} = \Psi_y = \Psi_z = 0,$$

$$\begin{cases} \Theta_i = \Theta_2, \\ \dfrac{\partial \Theta_i}{\partial X} = \lambda_{2,i} \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial X}, \quad i = 1,\ 4; \end{cases}$$

- на внутренних границах твердой фазы и воздушной, параллельных плоскости *XY*,

$$\Psi_x = \Psi_y = \frac{\partial \Psi_z}{\partial Z} = 0,$$

$$\begin{cases} \Theta_i = \Theta_2, \\ \dfrac{\partial \Theta_i}{\partial Z} = \lambda_{2,i} \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial Z}, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Задача (1)–(8) с соответствующими граничными и начальными условиями решена методом конечных разностей [5, 6].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Численные исследования проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: Ho = 1, $Gr = 10^6$, Pr = 0.71. Определяющие температуры имели следующие значения: $T_{о.с}$ = 253 K, $T_{и.т}$ = 333 K, T_0 = 293 K.

Линии тока и поле температуры, возникающие в области расположения источников тепловыделения x = 0.78 м, представлены на рис. 2 и 3. Сплошные линии тока (рис. 2) соответствуют движению против часовой стрелки, а штриховые – по часовой стрелке.

На рис. 2 представлены линии тока, соответствующие режиму конвективного теплопереноса при $Gr = 10^6$. Наличие циркуляционных течений в данном сечении области решения объясняется влиянием источников тепловыделения, которое описывается числом Грасгофа. Линии тока наглядно демонстрируют движение газовых масс: у источников тепловыделения они поднимаются, а у ближайшего элемента твердой фазы с относительно низкой температурой опускаются.

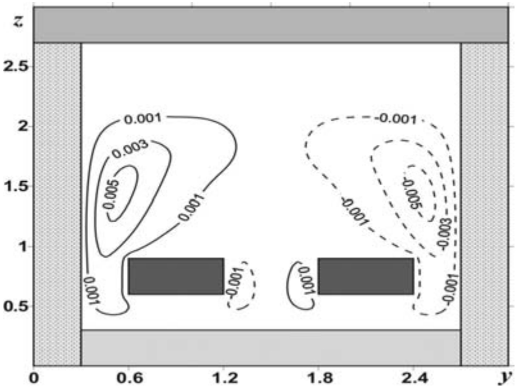

Рис. 2. Типичные линии тока в сечении x = 0.78 м; y, z, м

Симметричное положение изотерм на рис. 3 объясняется симметрией источников тепловыделения относительно оси y = 1.5 м. Заметно прогревание прямоугольного элемента твердой фазы у основания области решения (температура в этой зоне увеличилась на 3 K), что в свою очередь подтверждает влияние конвективного теплопереноса в газовой фазе на интенсификацию теплопроводности в элементе твердой фазы.

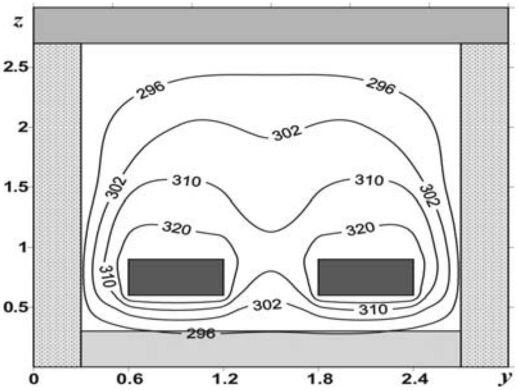

Рис. 3. Типичное поле температуры в сечении x = 0.78 м; y, z, м, T, K

На рис. 4 и 5 изображены линии тока и поле температуры, соответствующие сечению y = 1.08 м, проходящему через источник тепловыделения и область, прозрачную для излучения. Сплошные линии тока (рис. 4) соответствуют движению по часовой стрелке, а штриховые – против часовой стрелки.

В этом сечении присутствует область, прозрачная для излучения, состоящая из двух элементов твердой фазы и газовым слоем между ними. Между этими двумя слоями твердой фазы происходит движение массы газа против часовой стрелки, поскольку первый слой (при движении по оси x в положительном направлении) имеет температуру, меньшую, чем второй слой. Аналогичная картина течения находится за вторым слоем твердой фазы. Течение в этой области деформирует основное циркуляционное течение, находящееся внутри газовой полости.

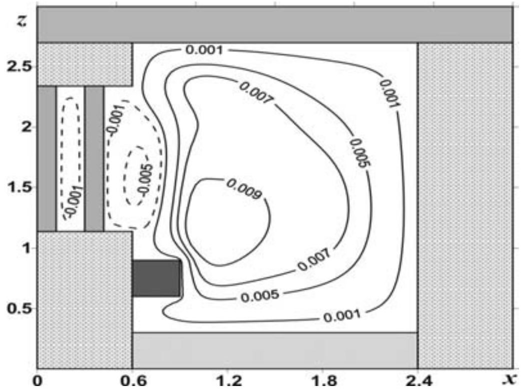

Рис. 4. Типичные линии тока в сечении y = 1.08 м; x, z, м

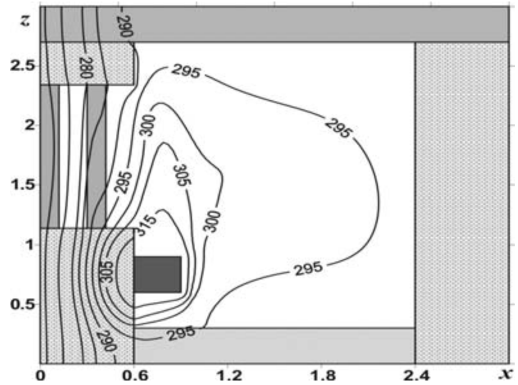

Рис. 5. Типичное поле температуры в сечении y = 1.08 м; x, z, м, T, К

Область, прозрачная для излучения, также вносит изменения в форму изотерм (рис. 5). В твердых слоях этой зоны изотермы продвигаются вглубь быстрее, чем в других окружающих элементах твердой фазы. Источник тепловыделения оказывает влияние на элемент твердой фазы, у которого он находится. В этой области происходит сопряжение изотерм, соответствующих низкой и высокой температурам, что приводит к деформации тепловой волны и неравномерному распределению температуры во втором слое области, прозрачной для излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно исследован режим термогравитационной конвекции в сопряженной постановке в условиях конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних граней области решения. Показано влияние как конвективного течения на интенсификацию теплопереноса в элементах твердой фазы (рис. 3, 5), так и кондуктивного теплопереноса в элементах твердой фазы на появление свободно конвективного течения (рис. 4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Томской области (грант № 05-02-98006 конкурс р_обь_а).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

a – коэффициент температуропроводности, м^2/с;

$\mathrm{Bi} = \alpha L_x/\lambda$ – число Био;

$\mathrm{Fo} = at_0\big/L_x^2$ – число Фурье;

g_z – z-составляющая вектора ускорения силы тяжести ($g_x = g_y = 0$), м/с^2;

$\mathrm{Gr} = \beta g_z L_x^3 (T_{\text{и.т}} - T_0)\big/\nu^2$ – число Грасгофа;

H – размер рассматриваемой области решения по оси z, м;

$\mathrm{Ho} = V_0 t_0\big/L_x$ – число гомохронности;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат;

L_x – размер области решения по оси x, м;

L_y – размер области решения по оси y, м;

$\mathrm{N} = \varepsilon\sigma L_x \left(T_{\text{и.т}} - T_0\right)^3\big/\lambda$ – число Старка;

$\mathrm{Pr} = \nu/a$ – число Прандтля;

t – время, с;

t_0 – масштаб времени, с;

T – температура, К;

$T_{\text{о.с}}$ – температура окружающей среды, К;

T_0 – начальная температура области решения, К;

$T_{\text{и.т}}$ – температура на источнике тепловыделения, К;

u, v, w – составляющие скорости в проекциях на оси x, y, z соответственно, м/с;

U, V, W – безразмерные скорости, соответствующие u, v, w;

V_0 – масштаб скорости (скорость конвекции), м/с;

x, y, z – декартовы координаты;

X, Y, Z – безразмерные координаты, соответствующие x, y, z;

α – коэффициент теплообмена, Вт/(м^2·К);

β – температурный коэффициент объемного расширения, К$^{-1}$;

Δ – оператор Лапласа;

ε – приведенная степень черноты;

Θ – безразмерная температура;

λ – коэффициент теплопроводности стенки, Вт/(м·К);

$\lambda_{ij}=\lambda_i/\lambda_j$ – относительный коэффициент теплопроводности;

ν – коэффициент кинематической вязкости, м^2/с;

ρ – плотность, кг/м^3;

σ – постоянная Стефана-Больцмана, Вт/(м^2·К^4);

τ – безразмерное время;

ψ_x, ψ_y, ψ_z – компоненты векторного потенциала $\vec{\psi}$ в декартовой системе координат, м^2/с;

ψ_0 – масштаб компоненты векторного потенциала, м^2/с;

Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z – безразмерные компоненты векторного потенциала, соответствующие ψ_x, ψ_y, ψ_z;

ω_x, ω_y, ω_z – компоненты вектора завихренности $\vec{\omega}$ в декартовой системе координат, с$^{-1}$;

ω_0 – масштаб компоненты вектора завихренности, с$^{-1}$;

Ω_x, Ω_y, Ω_z – безразмерные компоненты вектора завихренности, соответствующие ω_x, ω_y, ω_z.

Индексы:

i, j – номер материала;

k – порядковый номер орта системы координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лыков А.В., Алексашенко А.А., Алексашенко В.А.** Сопряженные задачи конвективного теплообмена. Минск: Изд-во БГУ, 1971. 346 с.
2. **Leong W.H., Hollands K.G.T., Brunger A.P.** Experimental Nusselt numbers for a cubical-cavity benchmark problem in natural convection // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1999. V.42. P.1979–1989.
3. **Джалурия Й.** Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 400 с.
4. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1991. Т.2. 555 с.
5. **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
6. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.