

А.М. Ильясов, К.В. Моисеев, С.Ф. Урманчиев

Институт механики УНЦ РАН, Уфа, Россия

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ

АННОТАЦИЯ

В работе приведены результаты численного моделирования тепловой конвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры в полости при различных углах наклона к горизонту. Исследованы интегральные коэффициенты теплообмена на изотермических границах, построена зависимость минимального критического числа Рэлея от угла наклона полости.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследовалась конвекция жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры для нулевого угла наклона полости. Установлены области стационарных, квазипериодических и хаотических режимов конвекции. Показано что немонотонная зависимость вязкости ухудшает теплообмен. В данной работе численно изучается влияние угла наклона полости к горизонту на характеристики естественной конвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о естественной конвекции ньютоновской термовязкой жидкости в замкнутой квадратной полости $D = [0, L] \times [0, L]$ с боковыми адиабатическими и горизонтальными изотермическими границами, отклоненной от горизонта на угол α . Будем считать, что полость подогревается снизу.

Условия применимости приближения Буссинеска и вывод уравнений конвекции приведены в работе [2]. Запишем систему уравнений термовязкой жидкости после приведения к безразмерному виду:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \operatorname{div}(\bar{\mu}(\theta) \nabla \vec{v}) - \frac{\bar{g} \operatorname{Gr} \theta}{|\bar{g}|},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \theta = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \Delta \theta,$$

где $\operatorname{Gr} = \frac{g\beta(T_H - T_C)L^3}{\nu^2}$ — число Грасгофа;

$\operatorname{Pr} = \frac{\mu c}{k}$ — число Прандтля; $\bar{\mu} = \frac{\mu(\theta)}{\mu}$ — безраз-

мерная динамическая вязкость.

Граничные условия в данной постановке задачи примут вид:

$$\vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=1;$$

$$\vec{v} = 0, \quad \theta = 0.5, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=0;$$

$$\vec{v} = 0, \quad \theta = -0.5, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=1.$$

В качестве начальных условий примем состояние равновесия жидкости:

$$\vec{v} = 0, \quad \theta = 0, \quad p = 0.$$

Рассмотрим фиксированный интервал температур $[T_C, T_H]$, на котором вязкость изменяется в диапазоне $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ и достигает своего наибольшего значения при абсолютных температурах T_H и T_C . Примем, что максимальное значение вязкости в 10 раз превосходит ее значение в вершине параболы, в которой при средней температуре T_0 достигается минимум. Тогда квадратичную зависимость можно определить следующей формулой:

$$\bar{\mu}(\theta) = 36\theta^2 + 1.$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ТЕСТЫ

Для численного решения задачи применялся метод контрольного объема с использованием алгоритма SIMPLE, подробно описанный в [3].

В качестве тестовых задач рассматривались задачи о свободной конвекции жидкости в полости с постоянной вязкостью и с квадратичной зависимостью вязкости от температуры. Система уравнений, граничные и начальные условия для задачи с постоянной вязкостью остаются такими же, как и в задаче с квадратичной зависимостью вязкости, а безразмерная вязкость полагается равной единице: $\bar{\mu}(\theta) = 1$.

Так как при установившихся режимах конвекции тепловые потоки в силу уравнения притока тепла на изотермических стенках должны быть равны, то течение считалось установившимся, если отличие тепловых потоков составляло менее 0.1%. То есть требовалось выполнение условия

$$\Delta \operatorname{Nu} = \left| \frac{\operatorname{Nu}_H - \operatorname{Nu}_C}{\operatorname{Nu}_0} \right| \cdot 100\% < 0.1,$$

где Nu_0 — число Нуссельта на подогреваемой границе в начальный момент времени.

Тестовые расчеты для постоянной вязкости производились в случае стационарного режима при $Pr = 7$ и $Gr = 1000$ (табл. 1), а для квадратичной зависимости вязкости в случае хаотических режимов при $Pr = 118$ и $Gr = 12000$ (табл. 2). Безразмерный временной шаг полагался равным $\delta t = 10^{-4}$, числа Нуссельта осреднялись по достаточно большому промежутку времени:

$$Nu = \frac{1}{t_{\text{end}} - t_0} \int_{t_0}^{t_{\text{end}}} Nu(t) dt.$$

Относительная погрешность определялась формулой $\Delta_{\text{rel}} = \left| \frac{Nu_n - Nu_{2n}}{Nu_n} \right|$.

Таблица 1. Сходимость чисел Нуссельта на изотермических стенках для постоянной вязкости

Количество узлов	Средние числа Нуссельта	Относительная погрешность, %
10 × 10	2.0403	-
20 × 20	1.9691	3.489
40 × 40	1.9503	0.954
80 × 80	1.9456	0.240

Таблица 2. Сходимость чисел Нуссельта на изотермических стенках для квадратичной зависимости вязкости

Количество узлов	Средние числа Нуссельта	Относительная погрешность, %
10 × 10	4.64	-
20 × 20	4.35	6.25
40 × 40	4.55	4.59
80 × 80	4.73	3.95

Видно, что как в случае стационарной конвекции с постоянной вязкостью, так и в случае хаотической конвекции с квадратичной зависимостью теплообмен для сеток 40×40 и 80×80 практически мало различается. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что метод контрольного объема и алгоритм SIMPLE при выбранном шаге интегрирования дают вполне удовлетворительные результаты.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Все расчеты производились при фиксированном числе $Pr = 118$ на сетке 50×50 узлов. Уравнения конвекции интегрировались с постоянным безразмерным временным шагом $\delta t = 10^{-4}$. Числа Грасгофа варьировались в диапазоне $1 \leq Gr \leq 40000$, а угол наклона каверны в интервале $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ с шагом в 15° .

Для $\alpha = 0^\circ$ установлено, что в диапазоне чисел Грасгофа $100 \leq Gr \leq 250$ реализуются одновихревые стационарные течения с постоянным теплообменом. С увеличением числа Gr теряется устойчивость одновихревой ячеистой структуры и происходит бифуркация к симметричному двухвихревому

стационарному течению, которое существует в интервале чисел Грасгофа $300 \leq Gr \leq 2000$.

Двухвихревые симметричные течения сохраняются примерно до чисел $Gr = 2100$, после чего происходит бифуркация к асимметричному двухвихревому установившемуся течению, которое реализуется в диапазоне $2100 \leq Gr \leq 2600$.

При дальнейшем увеличении числа Грасгофа происходит бифуркация к колебательному режиму конвекции. Периодические и квазипериодические режимы существуют в пределах $2700 \leq Gr \leq 9000$.

Хаотические режимы конвекции обнаружены в интервале чисел Грасгофа $9000 < Gr \leq 40000$.

Таким образом, для $\alpha = 0^\circ$ установлено шесть основных режимов конвекции.

Также были произведены расчеты при нулевом угле наклона для жидкости с минимальной μ_{min} ($Pr = 118$) и максимальной μ_{max} ($Pr = 1180$) постоянной вязкостью соответственно, результаты расчетов приведены на рис. 1.

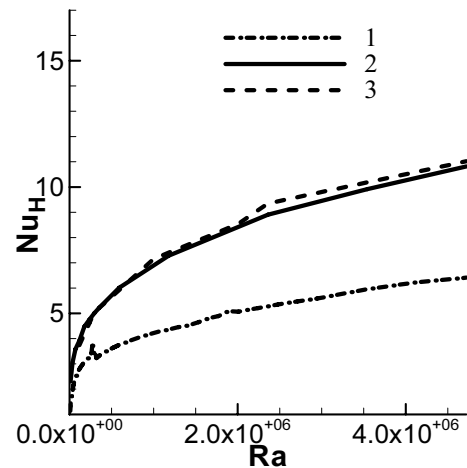


Рис. 1. Карта режимов теплообмена для максимальной и минимальной постоянных вязкостей и квадратичной зависимости вязкости: 1 — квадратичная зависимость вязкости; 2 — постоянная минимальная вязкость ($Pr = 118$); 3 — постоянная максимальная вязкость ($Pr = 1180$)

Практическое совпадение кривых 2 и 3 свидетельствует об универсальности числа Рэлея для жидкости с постоянной вязкостью. Однако сравнение кривой 1 с кривыми 2 и 3 указывает на то, что квадратичная зависимость вязкости от температуры ухудшает теплообмен.

Установлено, что для жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры при $\alpha = 0^\circ$ минимальное критическое число Рэлея $Ra_{\text{sqr}}^{\text{cal}}$ более чем в три раза превышает как теоретическое значение числа $Ra_{\text{const}}^{\text{th}}$, приведенное в работе [2] для жидкости с постоянной вязкостью, так и численно полученное в данной работе значение $Ra_{\text{const}}^{\text{cal}}$ и равно $Ra_{\text{sqr}}^{\text{cal}} = 3.4Ra_{\text{const}}^{\text{th}} = 3.3Ra_{\text{const}}^{\text{cal}}$.

При $\alpha = 15^\circ$ обнаружено два типа стационарных одновихревых течений: первый реализуется в диапазоне чисел Грасгофа $10 \leq Gr \leq 2300$, а второй — в интервале $2400 \leq Gr \leq 13000$ и отличается от первого наличием вложенных малых вихрей, симметрично расположенных относительно оси симметрии полости. При числах Грасгофа $14000 \leq Gr \leq 25000$ обнаружен колебательный режим конвекции, характеризующийся противофазными колебаниями, а в интервале $25000 < Gr \leq 40000$ реализуются синфазные колебания чисел Нуссельта на изотермических стенках.

При $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ обнаружены только стационарные одновихревые колебания двух типов. Бифуркация происходит в окрестности числа $Gr = 2000$, после чего одновихревое течение трансформируется в одновихревое с вложенными малыми вихрями.

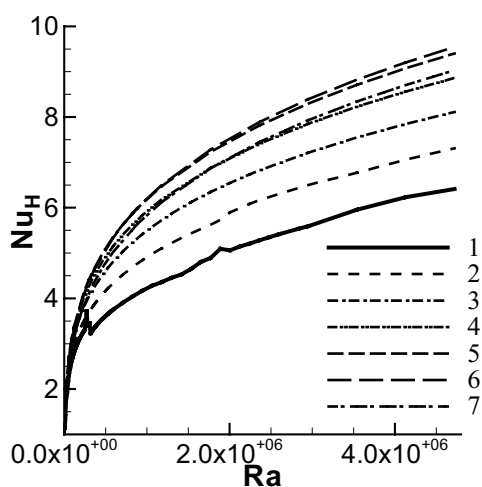


Рис. 2. Карта режимов теплообмена для квадратичной зависимости вязкости: 1 — $\alpha = 0^\circ$; 2 — $\alpha = 15^\circ$; 3 — $\alpha = 30^\circ$; 4 — $\alpha = 45^\circ$; 5 — $\alpha = 60^\circ$; 6 — $\alpha = 75^\circ$; 7 — $\alpha = 90^\circ$

На рис. 2 показаны интегральные числа Нуссельта на подогреваемой границе в зависимости от числа Рэлея $Ra = Pr \cdot Gr$ для жидкости с квадратичной зависимостью вязкости при различных углах наклона полости. Видно, что с увеличением угла α при фиксированном числе Ra теплообмен улучшается. Однако, при $\alpha = 90^\circ$ (сплошная тонкая линия) теплообмен становится хуже, чем для углов 60° и 75° .

Интегральные числа Нуссельта на горячей стенке в зависимости от числа Рэлея приведены на рис. 3 для жидкости с постоянной вязкостью. Очевидно, что при увеличении угла α наблюдается аналогичная картина, но для всех углов наклона теплообмен становится выше, чем для жидкости с квадратичной зависимостью вязкости.

На рис. 4 представлена зависимость минимального критического числа Рэлея от угла α для термовязкой жидкости. Видно, что с увеличением угла

наклона минимальное критическое число Рэлея уменьшается.

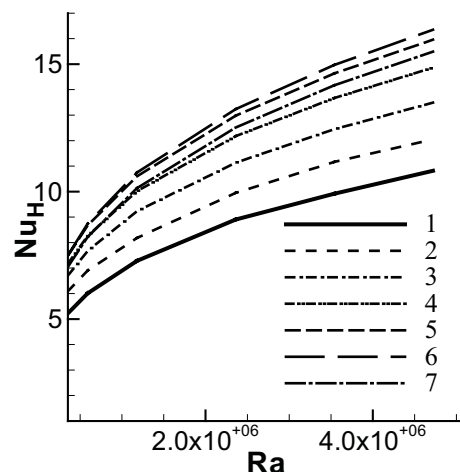


Рис. 3. Карта режимов теплообмена для постоянной вязкости: 1 — $\alpha = 0^\circ$; 2 — $\alpha = 15^\circ$; 3 — $\alpha = 30^\circ$; 4 — $\alpha = 45^\circ$; 5 — $\alpha = 60^\circ$; 6 — $\alpha = 75^\circ$; 7 — $\alpha = 90^\circ$

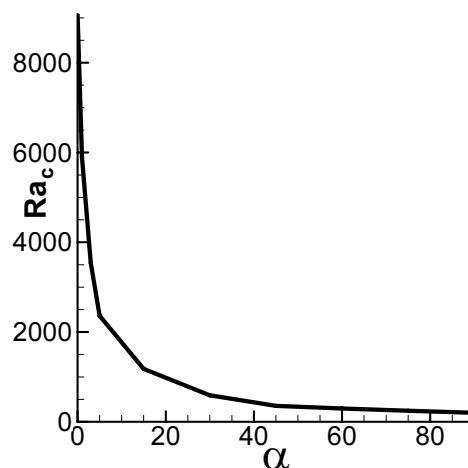


Рис. 4. Зависимость критического числа Рэлея от угла наклона полости для квадратичной зависимости вязкости

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлены области режимов конвекции при различных углах наклона полости для жидкостей с постоянной вязкостью и с квадратичной зависимостью вязкости от температуры. Построены карты режимов теплообмена. Показано, что квадратичная зависимость вязкости ухудшает теплообмен на изотермических границах для всех α . Обнаружено, что как для термовязкой жидкости, так и для жидкости с постоянной вязкостью с увеличением угла наклона α теплообмен улучшается. Однако при $\alpha = 90^\circ$ теплообмен становится хуже, чем для углов наклона полости, находящихся в интервале $60^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$. Показано, что с ростом угла наклона полости минимальное критическое число Рэлея убывает.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

\bar{v} — безразмерная скорость;
 p — безразмерное давление;
 $\theta = \frac{T - T_0}{(T_H - T_C)}$ — безразмерная температура;
 ρ — плотность, кг/м³;
 μ — динамическая вязкость, Па · с;
 ν — кинематическая вязкость, м² / с;
 c — теплоемкость, м² / (с² · К);
 k — коэффициент теплопроводности жидкости, кг · м / (с³ · К);
 β — коэффициент объемного расширения, К⁻¹;
 g — ускорение силы тяжести, м/с²;
 α — угол наклона полости относительно горизонта, рад;
 T_H — температура нижней границы, К;
 T_C — температура верхней границы, К;
 $T_0 = \frac{(T_H + T_C)}{2}$ — средняя температура, К;
 $Ra = Pr \cdot Gr$ — число Рэлея;
 Ra_c — критическое число Рэлея;
 Ra_{sq}^{cal} — вычисленное критическое число Рэлея для жидкости с квадратичной зависимостью вязкости;
 Ra_{const}^{th} — теоретическое критическое число Рэлея для жидкости с постоянной вязкостью;

Ra_{const}^{cal} — вычисленное критическое число Рэлея для жидкости с постоянной вязкостью;

$Gr = \frac{g\beta(T_H - T_C)L^3}{\nu^2}$ — число Грасгофа;

$Pr = \frac{\mu c}{k}$ — число Прандтля;

$\bar{\mu} = \frac{\mu(\theta)}{\mu}$ — безразмерная динамическая вязкость;

$Nu_H = - \int_0^1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} dx$ — число Нуссельта на горячей стенке полости;

$Nu_C = - \int_0^1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=1} dx$ — число Нуссельта на холодной стенке полости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф.** Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // СибЖИМ. 2005. Т. 8. № 4(24). С. 35—38.
2. **Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
3. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.