

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

АННОТАЦИЯ

Исследуется линейная потеря устойчивости осесимметричных нелинейных течений со свободной поверхностью при наличии термокапиллярной конвекции. Конвективное течение описывается уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска, на свободной поверхности ставятся кинематические, динамические и тепловые граничные условия. Исследование линейной устойчивости осуществляется методом решения задачи на собственные значения. Для решения задачи разработана численная методика, включающая в себя построение базисного решения на основе метода Ньютона в матричном виде и нахождения собственных значений и функций на основе метода обратной итерации. В задаче о потере устойчивости осесимметричного термокапиллярного течения в круговом бассейне при наличии радиального градиента получены критические значения числа Марангони и азимутального волнового числа в зависимости от скорости вращения бассейна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Термокапиллярные течения часто очень важны в промышленных процессах в присутствии неизотермических жидких интерфейсов. В частности, термокапиллярные течения важны при росте кристаллов в методах плавающей зоны и Чохральского. В этих методах докритическое течение является осесимметричным. Потеря устойчивости течения приводит либо к потере симметрии, либо к появлению нежелательных колебаний. Анализ устойчивости, таким образом, важен, так как ее потеря может вызывать неоднородности в выращиваемых кристаллах. Решение задач конвективной устойчивости, в частности термокапиллярной природы, рассмотрено в монографиях [1, 2]. Исследование линейной устойчивости термокапиллярного течения в жидком мосте для высоких чисел Прандтля проведено в [3].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Класс рассматриваемых задач составляют осесимметричные течения при наличии свободной поверхности, на которой при наличии разности температур возникает термокапиллярная конвекция. На рис. 1 представлены типичные конфигурации, в которых возникают осесимметричные термокапиллярные течения. Это — жидкие зоны или жидкие мосты (а и б), в которых имеется внешний вертикальный температурный градиент, конфигурация метода Чохральского (с) и круговой бассейн (d), в которых имеется внешний горизонтальный температурный градиент. Частным случаем этих задач

являются изотермические течения, движение в которых возникает благодаря движению границ.

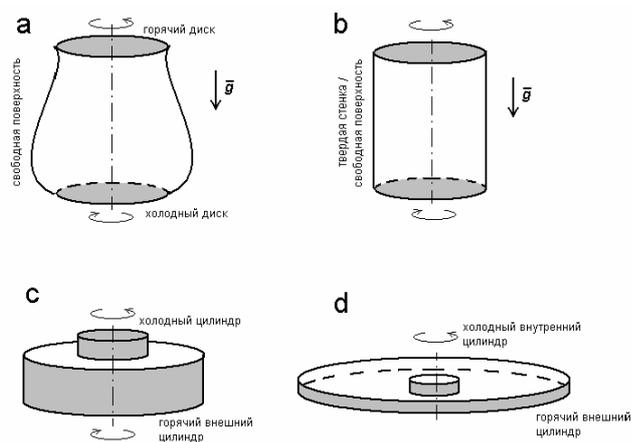


Рис. 1. Типичные осесимметричные конфигурации с термокапиллярными течениями

Круговой бассейн представляет собой горизонтальный осесимметричный объем высотой d , ограниченный внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 , заполненный жидкостью (рис. 1, d). Верхняя плоская поверхность жидкости является свободной. Температура внутреннего T_1 и внешнего T_2 цилиндров постоянна, причем температура внутреннего цилиндра ниже. Нижняя и верхняя границы бассейна предполагаются термоизолированными. Нижняя и боковые границы являются твердыми стенками, на которых выполнены условия прилипания и которые вращаются вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω .

Поведение жидкости определяется уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска для ньютоновской жидкости, поверхностное натяжение σ которой предполагается линейной функцией температуры T :

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0). \quad (2.1)$$

Уравнения неразрывности, баланса импульса и притока тепла имеют вид:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{V}_t + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{V} + \beta T \vec{g}, \quad (2.3)$$

$$\rho_0 c_p (T_t + \vec{V} \nabla T) = \kappa \Delta T, \quad (2.4)$$

где размерные величины \vec{V} , p есть скорость и давление. Величины $\rho_0, \nu, \beta, \vec{g}, c_p, \kappa$ есть плотность,

коэффициент кинематической вязкости, коэффициент объемного расширения, сила тяжести, теплоемкость при постоянном давлении, коэффициент теплопроводности. На дне и вертикальных стенках ставятся условия прилипания, на верхней и нижней границах — условия теплоизоляции. На свободной границе ставится граничное условие баланса касательных напряжений.

Безразмерные уравнения неразрывности, движения и притока тепла в цилиндрических координатах (r, φ, z) с компонентами скорости $\vec{V} = (U, V, W)$ имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)U - \frac{V^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \Delta U - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)V + \frac{UV}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \Delta V - \frac{V}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)W = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta W + Gr \cdot T, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)T = \frac{1}{Pr} \Delta T. \quad (2.9)$$

Граничные условия на свободной поверхности в безразмерном виде имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Re \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{\partial V}{\partial z} = Re \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, W = \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (2.10)$$

Безразмерные параметры включают в себя два безразмерных геометрических параметра:

$$A = \frac{d}{r_2}, \quad Ar = \frac{r_1}{r_2}, \quad (2.11)$$

остальные параметры включают в себя терموкапиллярное число Рейнольдса Re , число Грасгофа Gr , число Прандтля Pr и число Тейлора Ta , характеризующее безразмерную скорость вращения:

$$Re = \frac{\gamma d^2}{\rho \nu^2} \frac{T_2 - T_1}{r_2 - r_1}, \quad Gr = \frac{g \beta d^4}{\nu^2} \frac{T_2 - T_1}{r_2 - r_1}, \quad (2.12)$$

$$Pr = \frac{\rho c p \nu}{\kappa}, \quad Ta = \frac{\Omega d^2}{\nu}.$$

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ И ТЕСТЫ

Исследование задачи на устойчивость предполагает наличие двух шагов. На первом шаге находится базисное решение, которое является решением стационарных уравнений. Для этого в полных трехмерных уравнениях (2.5)—(2.10) опускаются частные производные по времени и азимутальному направлению. Азимутальная компонента скорости при этом в уравнениях остается и может быть ненулевой из-за вращения системы.

Разностные уравнения записываются в дивергентном виде. Для пространственной дискретизации осесимметричных стационарных уравнений приме-

няется метод конечных объемов для смещенных сеток, в котором радиальная и осевая компоненты скорости определяются на гранях сеточных объемов, а скалярные величины, давление и температура, и азимутальная компонента скорости определяются в центрах этих объемов. Конвективные производные аппроксимируются центральными разностями, обеспечивающими второй порядок точности аппроксимации. Введение, при необходимости, существенно неравномерной сетки при дивергентной записи уравнений позволяет воспроизвести тонкую структуру пограничных слоев вблизи точек соприкосновения твердых и свободных поверхностей без введения регуляризации.

Для решения разностных (дискретизованных) уравнений используется итерационный метод Ньютона [4] в матричной форме для $f(\vec{x}) = 0$:

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{f(x^{[k]})}{f'(x^{[k]})}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

для некоторого начального значения $x^{[0]}$. Так как якобиан $f'(x^{[k]})$ является матрицей, то для нахождения решения на следующей итерации требуется решать систему линейных алгебраических уравнений.

Вычисление якобиана преобразования явным, а не численным способом позволяет существенно ускорить вычисления и сэкономить оперативную память. Решение матричного уравнения (3.1) осуществляется стабилизированным методом бисопряженных градиентов BiCGStab с предобуславливанием [5]. Построение предобуславливателя для разреженной ленточной матрицы осуществлялось при помощи неполного LU-разложения, реализованного в библиотеке по решению разреженных систем линейных уравнений SPARSKIT II [5].

Использование матричных методов решения уравнений имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными явными и полуявными методами:

- 1) возможность построения эффективных полностью неявных схем без расщепления и обременительных ограничений, связанных с шагом интегрирования по времени;
- 2) отсутствие необходимости разработки метода решения разностных уравнений. Разностные уравнения решаются матричными методами;
- 3) возможность получения решений, неустойчивых для нестационарных уравнений. Это необходимо при исследовании линейной устойчивости решений;
- 4) высокая скорость сходимости при использовании метода Ньютона для решения нелинейных уравнений. Решение уравнений находится за несколько итераций.

Недостатки матричных методов связаны с высокими требованиями к количеству оперативной памяти и быстродействию. Опыт автора показывает, что при решении двумерных стационарных задач конвекции на сетке порядка 200x200 матричные ме-

тоды незначительно уступают современным традиционным полуневьяным методам по скорости при решении задач на установление. Эффективное применение матричных методов к решению трехмерных стационарных задач будет связано, скорее всего, с построением более эффективных преобуславливателей.

Полученное на первом шаге базисное решение для стационарных осесимметричных уравнений исследуется на устойчивость относительно малых возмущений. Для этого нестационарные трехмерные уравнения линеаризуются для малых значений $(u, v, w, p, t)^T$ в окрестности базисного решения $(U_0, V_0 = 0, W_0, P_0, T_0)^T$, возмущения в азимутальном направлении представляются в виде суперпозиции целочисленных нормальных мод:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ T \end{pmatrix}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ P_0 \\ T_0 \end{pmatrix}(r, z) + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ t \end{pmatrix}(r, z) e^{\lambda t + im\varphi}. \quad (3.2)$$

Азимутальная волна $m = 0$ соответствует чисто двумерному осесимметричному возмущению, $m = 1$ соответствует трехмерному возмущению с ненулевой скоростью на оси симметрии и $m > 1$ соответствует трехмерным возмущениям с нулевой скоростью на оси симметрии. Возмущения в радиальном и осевом направлениях аппроксимируются на той же самой сетке, что и базисное решение.

Анализ линейной устойчивости сводится к решению обобщенной задачи на собственные значения

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \in C^n \quad (3.3)$$

с диагональной вырожденной матрицей В. Вырожденность матрицы В происходит из-за отсутствия производной по времени в уравнении неразрывности для уравнений Буссинеска и включения граничных условия для возмущений функций в уравнения.

Решение обобщенной задачи на собственные значения реализуется на основе метода обратных итераций [4]. В силу колебательной потери устойчивости наиболее опасные собственные значения задачи являются комплексными. При наличии вращения они, кроме этого, перестают быть комплексно-сопряженными. Для решения систем уравнений используется комплексный вариант матричных вычислений. Метод обратных итераций позволяет находить, вообще говоря, собственное значение, ближайшее к начальному приближению. В силу этого, чтобы не пропустить собственное значение с наибольшей действительной частью, которое отвечает за потерю устойчивости системы, комплексная плоскость покрывалась сетью начальных приближений собственных значений, которые использовались для вычислений.

В силу ленточного характера и сильной разреженности рассматриваемых матриц применяется

компактная форма их хранения, при которой хранятся только ненулевые элементы матриц, как для основных матриц, так и для LU-разложения преобуславливателей. Эффективные преобуславливатели, позволяющие добиться сходимости решения линейной системы за несколько итераций, имеют на порядок больше ненулевых элементов, чем исходная матрица. Таким образом, использование матричных методов в данной задаче требует на два порядка больше памяти для хранения матриц, чем требуется памяти для хранения искомого функции. Персональный компьютер Pentium-4 3.2 ГГц с 2 ГБ памяти позволял осуществлять вычисления на сетках примерно до 200x200 узлов.

Разработанные методики тщательно тестировались для ряда ранее решенных известных задач (таблица 1). Набор тестов включал в себя исследование потери устойчивости конвективного течения в вертикальном слое [6], конвективного течения в двумерном объеме 4:1 при малом числе Прандтля жидкости [7], термокапиллярной конвекции (Марангони) в бесконечном цилиндре [8], термокапиллярной конвекции в конечном цилиндре [9] и изотермической вынужденной конвекции в цилиндре с вращающимися в разные стороны дисками [10]. Все тесты показали хорошее совпадение с ранее полученными результатами.

Таблица 1. Результаты решения тестовых проблем [3]

Тест	Параметры	Значение критического параметра / частота	Ссылочные параметры
[6]	Pr=0	495.57	495.6
[7]	L/H=4, Pr=0	25808 / 16.21	25525 / 16.207
[8]	$\Gamma=2.91$, Pr=1, $m=0$	304.9 / 22.07	306.75 / 21.71
[8]	$\Gamma=2.74$, Pr=10, $m=0$	313.9 / 6.97	313.77 / 6.96
[8]	$\Gamma=20.7$, Pr=2, $m=1$	66.4 / 11.43	64.354 / 11.28
[9]	$\Gamma=1$, Pr=4, $m=2$	1002 / 28.5	1047 / 27.9
[9]	$\Gamma=3$, Pr=0.02, $m=1$	2211	2219
[10]	$\Gamma=1.0$, $m=2$	299.2	299

4. ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КРУГОВОМ БАССЕЙНЕ

При отсутствии вращения кругового бассейна критические возмущения представляют собой бегущие в противоположные стороны гидротепловые волны. При наличии вращения эти волны становятся неэквивалентными и соответствующие собственные значения перестают быть комплексно-сопряженными. Данная постановка задачи помогает изучать колебательную потерю устойчивости термокапиллярных течений, обеспечивая распространение возмущений в азимутальном направлении и исключая из рассмотрения ось, на которой имеются обычно особенности из-за вырожденности преобразования к цилиндрическим координатам. Рассматривается круговой бассейн со следующими параметрами: $d = 3$ мм, $r_1 = 15$ мм, $r_2 = 50$ мм. Жидкость в бассейне соответствует расплаву кремния с числом

Прандтля $Pr = 0.011$. Влияние силы тяжести не учитывается. Анализ устойчивости показывает, что критическое число Марангони $Ma = 7.53$, а критическое азимутальное волновое число $m = 11$.

Соответствующая собственная функция (азимутальная скорость) представлена на рис. 2.

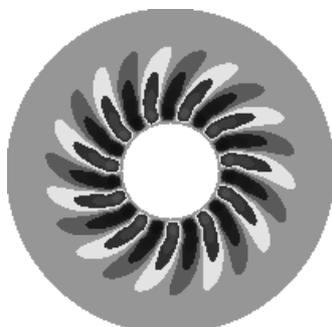


Рис. 2. Собственная функция задачи, соответствующая азимутальному волновому числу $m = 11$ в отсутствие вращения (описывает гидротепловую, бегущую в азимутальном направлении, волну)

На рис. 3 представлены нейтральные кривые, соответствующие различным значениям азимутального волнового числа m в зависимости от скорости вращения бассейна. Из графиков следует, что при вращении из пары “сопряженных” гидротепловых одна стабилизируется, а другая дестабилизируется. В результате течение дестабилизируется. Вращение также приводит к увеличению критического азимутального волнового числа. При дальнейшем увеличении вращения происходит стабилизация течения.

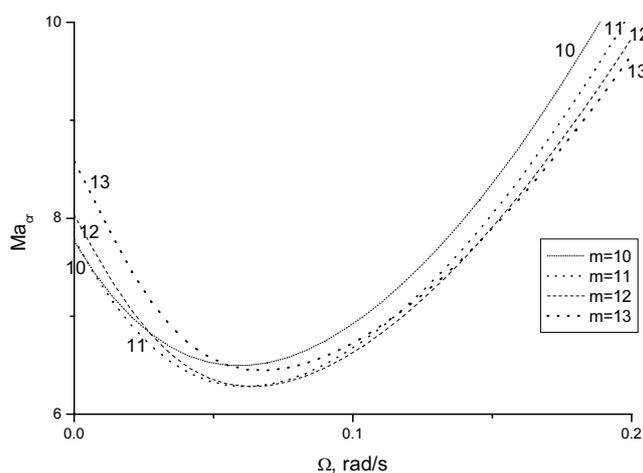


Рис. 3. Нейтральные кривые для различных m в зависимости от скорости вращения бассейна

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется линейная устойчивость класса задач осесимметричных нелинейных термокапиллярных течений. Для течения во вращающемся круговом бассейне приведены уравнения и сформулированы граничные условия. Описана схема получения разностных уравнений для нахождения базисного решения и решения обобщенной задачи на собственные значения.

Построена эффективная матричная методика решения двумерных уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска и решения обобщенной задачи на собственные значения на основе стабилизированного метода бисопряженных градиентов с предобуславливанием. Приведены результаты тестов и сравнения с имеющимися в литературе результатами. Повышение эффективности алгоритма связано с использованием лучших предобуславливателей для итерационного решения уравнений.

Исследована задача о потере устойчивости термокапиллярного течения во вращающемся круговом бассейне. Критическое течение в отсутствие вращения представляет собой пару бегущих в противоположные стороны гидротепловых волн. Получено, что вращение дестабилизирует течение. С увеличением вращения возрастает критическое азимутальное волновое число. При дальнейшем увеличении скорости вращения течение стабилизируется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 280 с.
3. Ermakov M.K., Ermakova M.S. Linear-stability analysis of thermocapillary convection in liquid bridges with highly deformed free surface // J. Crystal Growth. 2004. 266. 160—166.
4. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in Fortran. Cambridge, 2001.
5. Saad Y. Iterative methods for Sparse Linear Systems. 2nd edition, SIAM, 2003.
6. Ruth D.W. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1979. 23. 733.
7. Winters K.H. Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids, Notes on Numerical Fluid Mechanics. 1990. 27. 319.
8. Xu J.-J., Davis S.H. // Phys. Fluids. 1984. 27. 1102.
9. Wanschura M., Shevtsova V.M., Kuhlmann H.C., Rath H.J. // Phys. Fluids. 1995. 7. 912.
10. Nore C., Tartar M., Daube O., Tuckerman L.S. // Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks // J. Fluid Mechanics. 2004. 511. 45—65.