

О ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В ОДНОМЕРНЫХ ПОТОКАХ В КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются два вида одномерных осесимметричных потоков в круглоцилиндрической трубе: осевое (параллельноструйное) движение и вращение вокруг оси (вихрь Рэнкина). Для четырехслойной и двухслойной моделей осевого турбулентного потока рассчитана диссипация механической энергии в каждом слое. Аналогичный расчет выполнен для вихря Рэнкина при наличии вязкого подслоя. Используя принцип минимума диссипации установлено значение радиуса отделяющего квазитвердую часть вихря от его свободной (потенциальной) части. Предложена зависимость, аппроксимирующая распределение скорости жидкости в вихре Рэнкина.

Дифференциальное уравнение баланса механической энергии осредненного движения в продольно-однородном турбулентном потоке в круглоцилиндрической трубе имеет вид [1]:

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = -\eta \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right)^2 + \overline{\rho u'_x u'_r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}, \quad (1)$$

где (x, r, ε) – цилиндрические координаты; $\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\varepsilon)$ – скорость жидкости; p – гидродинамическое давление; η – динамический коэффициент вязкости; ρ – плотность жидкости.

Первое слагаемое в правой части выражает плотность диссипации (перехода в тепло) механической энергии осредненного движения. Оно представляет собой произведение вязких касательных напряжений, рассчитанных по осредненной скорости: $p_{rx}^B = \eta \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}$ на радиальную производную осредненной скорости. В последующих вычислениях будут использоваться экспериментальные зависимости $\bar{u}_x = \bar{u}_x(r)$; дифференцирование таких зависимостей, являясь некорректной операцией, увеличивает экспериментальную погрешность измерения скорости, что усугубляется тем, что производная скорости входит в (1) в квадрате, и, следовательно, погрешность удваивается. Для повышения точности вычислений выражение

$\eta \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right)^2$ представим в виде:

$$\eta \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right)^2 = p_{rx}^B \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}, \quad (2)$$

и будем считать, что напряжение p_{rx}^B является разностью:

$$p_{rx}^B = p_{rx} - p_{rx}^T, \quad (3)$$

где $p_{rx} = \frac{\tau_0 r}{R}$ – теоретическое распределение полного касательного напряжения при равномерном движении в круглой цилиндрической трубе; τ_0 – касательное напряжение на стенке трубы; R – радиус трубы; $p_{rx}^T = -\overline{\rho u'_x u'_r}$ – экспериментальное [2] значение турбулентного напряжения.

Второе слагаемое в правой части (1) представляет собой плотность распределения превращения энергии осредненного движения в энергию пульсационного движения. Согласно экспериментальным данным [2] примем, что в вязком подслое (при $R - 5\Delta < r < R$, где $\Delta = \frac{\nu}{u_*}$, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$) p_{rx}^T равно нулю, а в логарифмическом слое (при $0.8R < r < R - 30\Delta$) $p_{rx}^T = 0.8\tau_0$. В промежуточном слое (при $R - 30\Delta < r < R - 5\Delta$) примем линейную зависимость:

$$p_{rx}^T = 0.8\tau_0 \frac{R - 5\Delta - r}{25\Delta},$$

которая непрерывно связывает граничные значения p_{rx}^T . Во внутреннем слое (при $r < 0.8R$), где производная $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}$ мала, и погрешность при её вычислении не столь существенна, было принято прямое вычисление диссипации согласно уравнению (1), а также принималось $p_{rx}^T \approx p_{rx} = \frac{\tau_0 r}{R}$.

Рассчитаем в пределах каждого слоя E^B – диссипацию механической энергии осредненного движения и E^T – превращение этой энергии в энергию пульсационного движения. Результаты расчета в диапазоне чисел Рейнольдса Re_D от 10^4 до 10^5 приведем в табл. 1. Здесь $Re_D = \frac{vD}{\nu}$, где $D = 2R$, v – средняя (расходная) скорость в трубе. Предполагается, что труба гидравлически гладкая и справедлива формула Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re_D^{0.25}}.$$

Таблица 1

Наименование слоя	$\frac{E^B}{\rho u_*^3 R}$	$\frac{E^T}{\rho u_*^3 R}$
Вязкий подслой	31.4	0
Промежуточный слой	35.26...41.86	16.1...16.3
Логарифмический слой	0.5...5.45	7.03...33.4
Внутренний слой	1.99...0.264	8.037
По всему потоку	69.86...78.97	31.1...57.7

Очевидно, что энергия пульсационного движения также превращается в теплоту, поэтому можно сравнить результаты вычислений с полной диссипацией энергии в потоке:

$$E = \tau_0 \cdot 2\pi R v = 2\pi \rho u_*^3 R \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = (99.3...132.4) \rho u_*^3 R. \quad (4)$$

Согласно табл. 1:

$$E = E^B + E^T = (100.25...136.67) \rho u_*^3 R, \quad (5)$$

что вполне удовлетворительно соответствует (4).

Как показано в [3], при ламинарном режиме движения минимум диссипации механической энергии реализуется, если продольная скорость имеет параболическое распределение:

$$u_x = 2v \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (6)$$

Кроме того, там же показано, что если $Re_D > 2300$, то диссипация при турбулентном режиме меньше, чем при ламинарном (при одних и тех же граничных условиях для области, занятой жидкостью). Можно доказать, что для цилиндрической трубы граничными условиями, накладываемыми на поле скорости, является равенство нулю скорости на стенке и значение касательного напряжения на стенке трубы τ_0 (или u_*).

Установим значение числа Рейнольдса, при котором диссипация механической энергии при ламинарном режиме E_L и при турбулентном режиме E_T равны между собой. Очевидно, сравнивать E_L и E_T имеет смысл только при одинаковых граничных условиях. Согласно (4) имеем:

$$E_L = \tau_0 2\pi R v_L = \tau_0 2\pi R v_T = E_T, \quad (7)$$

где v_L и v_T – средние скорости для ламинарного и турбулентного режимов. Выразим эти скорости через u_* . Для ламинарного движения из (6) следует:

$$\tau_0 = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{r=R} = -\eta 2v_L \frac{2r}{R} = -4\eta \frac{v_L}{R},$$

откуда

$$v_L = \frac{u_*^2 R}{4\nu} = \frac{u_*}{4} Re_*, \quad (8)$$

где

$$Re_* = \frac{u_* R}{\nu} = \frac{v D}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot \frac{1}{2} = 0.1 Re_D^{7/8} = 316,2...3714.$$

При турбулентном режиме воспользуемся формулой Блазиуса:

$$v_T = u_* \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5u_* Re_D^{1/8} = 5u_* (10 Re_*)^{1/7}. \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) в (7) и получим значение критического числа:

$$(Re_*)_{кр} = 48,38.$$

При $Re_* < (Re_*)_{кр}$ диссипация при турбулентном режиме больше, чем при ламинарном, а при $Re_* > (Re_*)_{кр}$ наоборот. Отметим, что этому значению $(Re_*)_{кр}$ соответствует $(Re_D)_{кр} = 1170$.

Полученное значение $(Re_D)_{кр}$ вдвое меньше экспериментально установленного значения $(Re_D)_{кр} = 2300$. Это объясняется возможно тем, что в реальных потоках принцип минимума диссипации не является единственно решающим при переходе от ламинарного режима к турбулентному, но главным образом тем, что формула Блазиуса при числах $Re_D < 4000$ не имеет и не может иметь экспериментального подтверждения. Кроме того, есть материалы крупномасштабных экспериментальных исследований потерь по длине [4], согласно которым при $200 < Re_D < 2000$ потери напора $h_l \sim v^{1.2}$, что указывает на сложный нестационарный характер течения жидкости в этом диапазоне чисел Рейнольдса.

Проведем подобные вычисления для двухслойной модели турбулентного потока, часто используемой на практике. Согласно этой модели вязкий подслой имеет толщину $c\Delta$, где c – безразмерная постоянная, значение которой предстоит установить, а осредненная скорость распределена линейно. Турбулентные напряжения в этом подслое малы, поэтому вся энергия осредненного движения за счет вязкости диссипирует в теплоту. В этом слое:

$$E_{вп}^B = 2\pi \rho u_*^3 R \left(c - \frac{c^2}{Re_*} + \frac{c^3}{Re_*^2} \right). \quad (10)$$

В турбулентном ядре имеет место свободная турбулентность, и коэффициент турбулентной вязкости ν^T не зависит от радиуса r . Полагая, что скорость распределена непрерывно, найдем:

$$-u_x = \frac{u_*}{\nu^T R} \frac{(R - c\Delta)^2 - r^2}{2} + cu_*.$$

В турбулентном ядре $\nu^T \gg \nu$, и, следовательно, здесь энергия осредненного движения почти полно-

стью превращается в энергию пульсационного движения, и только потом диссипирует в тепло.

Суммарная потеря энергии осредненным потоком

$$E = 2\pi r u_*^3 R K, \quad (11)$$

где

$$K = \frac{\text{Re}_*}{4k} + c \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{c^2}{\text{Re}_*} \left(1 - \frac{3}{2k}\right) + \frac{c^3}{\text{Re}_*^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{k}\right) + \frac{c^4}{4k \text{Re}_*^3}; \quad k = \frac{v^T}{v}.$$

Расход жидкости в трубе:

$$Q = \pi u_* R^2 K. \quad (12)$$

Из этого выражения получим следующее равенство:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{\text{Re}_*}{4k} + c \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{c^2}{\text{Re}_*} \left(1 - \frac{3}{2k}\right) + \frac{c^3}{\text{Re}_*^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{k}\right) + \frac{c^4}{4k \text{Re}_*^3}. \quad (13)$$

Используя (13), из (11) получим, что при $c = 0$ (т.е. при отсутствии вязкого подслоя):

$$k = \frac{\text{Re}_*}{4} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 5 \dots 28.12.$$

При этом осредненная скорость имеет параболическое распределение. Такое распределение осредненной скорости турбулентного потока возможно реализуется в трубе, стенки которой имеют неровности (выступы и впадины) с геометрическими размерами, превышающими $\frac{R}{5}$, так что их нельзя рассматривать как шероховатость. Турбулентность потока определяется обтеканием отдельных неровностей и практически однородна, а пристеночный слой с логарифмическим распределением скорости не образуется. Параболическое распределение скорости соответствует минимуму диссипации энергии [3] (в нашем случае это минимум потери энергии осредненным потоком).

Найдем значения $c \neq 0$, т.е. толщину вязкого подслоя, исходя из условия, что только в этом подслое происходит непосредственная диссипация в тепло механической энергии. Согласно табл. 1, это составляет 0.7...0.58 от всей потери энергии осредненным потоком. Решая уравнение

$$E_{\text{ВП}} = (0.70 \dots 0.58) E, \quad (14)$$

в которое следует подставить выражения (10) и (11), найдем

$$c = 11.48 \dots 11.86,$$

а из равенства (13) получим

$$k = 14.3 \dots 63. \quad (15)$$

Как видно, полученные значения c хорошо совпадают с используемым на практике $c = 11.2$. Значения k для турбулентного ядра двухслойной модели (в которое входит логарифмический и внутренний слой четырехслойной модели), как и следовало ожидать, меньше, чем значения для внутреннего слоя.

Укажем дополнительно, что из уравнения (13) можно найти значения $c = 16.76 \dots 21.29$, соответствующее $k = \infty$. При этом скорость в турбулентном ядре постоянна (квазитвердое движение), а потери энергии осредненного движения осуществляются только в виде диссипации в тепло в вязком подслое.

Используем аналогичный прием для установления значений параметров вихря Рэнкина [5]. Примем трехслойную модель осесимметричного вихря в круглоцилиндрической трубе.

1. Квазитвердая часть (при $0 < r < R_\Gamma$). Здесь распределение азимутальной скорости линейное:

$$u_\varepsilon = u_\Gamma \frac{r}{R_\Gamma},$$

где u_Γ – скорость при $r = R_\Gamma$. В этой части диссипация отсутствует.

2. Свободный (потенциальный) вихрь (при $R_\Gamma < r < R - c\Delta$). Здесь движение турбулентное, осредненная азимутная скорость имеет распределение:

$$\overline{u_\varepsilon} = u_\Gamma \frac{R_\Gamma}{r}.$$

В этой части потока энергия осредненного движения превращается в энергию пульсационного движения:

$$E_{\text{ПОТ}} = 4\pi r v^T c^2 u_*^2 \left(\frac{1}{\rho_\Gamma^2} - 1 \right),$$

где $\rho_\Gamma = \frac{R_\Gamma}{R - c\Delta}$; здесь использовано следующее из

$$(38) \text{ равенство } u_\Gamma R_\Gamma = c u_* (R - c\Delta).$$

3. Вязкий подслои (при $R - c\Delta < r < R$). Здесь скорость распределена линейно:

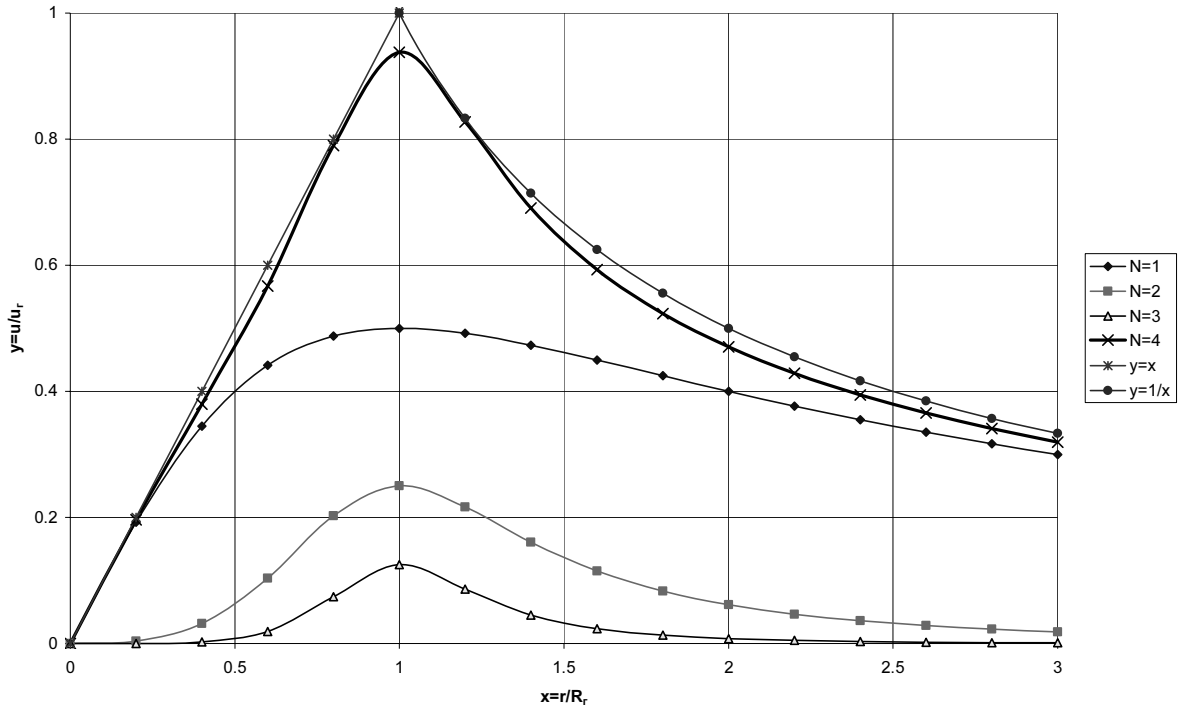
$$\overline{u_\varepsilon} = \frac{u_*^2}{v} (R - r),$$

а диссипация равна

$$E_{\text{ВП}} = 2\pi r u_*^3 R c \left(1 - \frac{c\Delta}{2R}\right).$$

Вычислим и зафиксируем удельный (на единицу длины трубы) расход жидкости через плоскость, нормальную к вектору азимутальной скорости, полагая $c\Delta$ пренебрежимо малым по сравнению с R :

$$q = \int_0^R u_\varepsilon dr = \frac{1}{2} c u_* R (1 - 2 \ln \rho_\Gamma). \quad (16)$$



Выразим u_* из (16) и представим суммарную потерю механической энергии осредненного движения $E = E_{\text{пот}} + E_{\text{вп}}$ в виде:

$$E = 8\pi\rho v^T c^2 u_*^2 \left(\frac{1}{\rho_\Gamma^2} - 1 \right) \frac{q^3}{c^3 R^3 (1 - 2 \ln \rho_\Gamma)^3} + 4\pi\rho u_*^3 R c \left(1 - \frac{c\Delta}{2R} \right) \frac{q^2}{c^2 R^2 (1 - 2 \ln \rho_\Gamma)^2}.$$

Найдем значение ρ_Γ , при котором имеет место минимум E , приравняв нулю производную E по ρ_Γ . В результате получим уравнение:

$$\left(\frac{3q}{c^2 v^T} - 2 \right) x + 1 = (\ln x - 2x) \ln x,$$

где $x = \rho_\Gamma^2$.

Если принять v^T согласно (15), а $c = 11.2$, то в диапазоне $\text{Re}_R = \frac{vR}{\nu} = \frac{q}{\nu} = 10^4 \dots 10^5$ получим, что значение ρ_Γ изменяется в пределах

$$\rho_\Gamma = 0.339 \dots 0.418.$$

В заключение приведем аппроксимацию поля скорости в турбулентном ядре вихря Рэнкина в виде:

$$u_\varepsilon = u_\Gamma \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left(\frac{r}{R_\Gamma} \right)^{2n-1}}{\left(\frac{r}{R_\Gamma} \right)^{4n-2} + 1}.$$

Согласно этой зависимости при $r \rightarrow 0$ скорость u_ε линейно зависит от r , а при больших значениях r эта скорость как в свободном вихре обратно пропорциональна r . На рисунке представлено распределение скорости u_ε , рассчитанное по формуле при $N=4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. М.: Наука, 1965. 640 с.
2. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в потоке с параллельными стенками. М.: Мир, 1968. 176 с.
3. Гиргидов А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика). СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 545 с.
4. Carothers S.D. Portland experiments on the flow of oil in tubes.- Proc. Roy. Soc., vol. A87, 1912. P. 154–163.
5. Пиралишвили Ш.А., Поляев В.Н. Сергеев М.Н. Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения / под ред. А.И. Леонтьева. М.: УНПЦ «Энергомаш», 2000. 412 с.