

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА АНОМАЛЬНО-ВЯЗКОЙ СРЕДЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ ТИПА «КОНФУЗОР-ДИФФУЗОР» С ПРЯМЫМИ СТЕНКАМИ

### АННОТАЦИЯ

Предложена математическая модель сопряженной задачи конвективного теплообмена течения вязкой жидкости во вращающемся прямом канале типа «конфузор-диффузор».

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросам исследования течения вязкой (ньютоновской) жидкости во вращающихся прямых каналах посвящено значительное число работ [1]. В [2, 3] рассмотрено течение вязкой жидкости во вращающихся трубах типа «конфузор-диффузор». Однако в настоящее время в литературе отсутствуют работы, посвященные исследованию процесса течения аномально-вязкой жидкости во вращающихся каналах сложной конфигурации, позволяющих обеспечивать интенсивные процессы теплообмена. В связи с этим представляет научный и практический интерес исследование течения неньютоновской жидкости в каналах сложной конфигурации.

В качестве модельной среды нами рассмотрены водные растворы карбоксиметилцеллюлозы (КМЦ), кривые течения которых хорошо описываются, в широком диапазоне изменения температур [4], «степенным» законом Оствальда – де Вилля  $\tau = k\dot{\gamma}^n$ . Реологические константы и значение температуропроводности (табл.1) получены в результате обработки экспериментальных данных [5].

Процесс развития течения аномально-вязкой жидкости рассматриваем в теплообменнике типа «труба в трубе» с вращающейся рабочей поверхностью типа «конфузор-диффузор».

Поверхность теплообмена такого аппарата выполнена в виде трубы 1 конфузорно-диффузорного типа (с углом конусности диффузора и конфузора не превышающим  $9-11^\circ$ ), коаксиально установлен-

ной относительно неподвижного канала 2. Труба 1 смонтирована в подшипниках 3 и вращается от электродвигателя 4. Внутри канала 1 поступает аномально-вязкая жидкость (КМЦ), а в межтрубное пространство через патрубок 5 противотоком подается горячая вода, нагретая до температуры 343К, которая затем отводится через патрубок 6.

Таблица 1. Теплофизические и реологические характеристики модельных неньютоновских жидкостей

Концентрация Na-КМЦ, % масс	$T$ , К	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$n$	$k$ , Па·с	$a \cdot 10^{-8}$ , м <sup>2</sup> /с
3%	293	1034	0,63	0,492	16,1
	313	1026	0,68	0,451	16,6
	333	1020	0,74	0,401	16,8
	353	1015	0,82	0,385	16,4
8,5%	293	1034	0,51	0,602	13,4
	313	1026	0,59	0,595	13,1
	333	1020	0,65	0,531	13,2
	353	1015	0,776	0,509	13,2

### 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ И КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Учитывая геометрию объекта (рис. 2) [3], течение аномально-вязкой жидкости во вращающейся трубе рассматриваем в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , где нулевое значение радиальной координаты  $r$  совпадает с осью трубы, координаты  $z$  – с входным сечением, а угловой координаты  $\varphi$  – с вертикальным сечением трубы.

Тогда уравнения движения, неразрывности, энергии и теплопроводности для течения аномально-вязкой жидкости в трубе с учетом центробежной силы запишутся в виде [3, 6]:

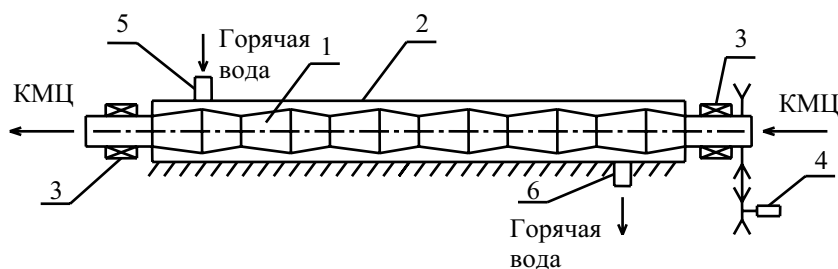


Рис. 1. Теплообменное устройство типа «труба в трубе» с вращающейся поверхностью «конфузор-диффузор» [2,3]

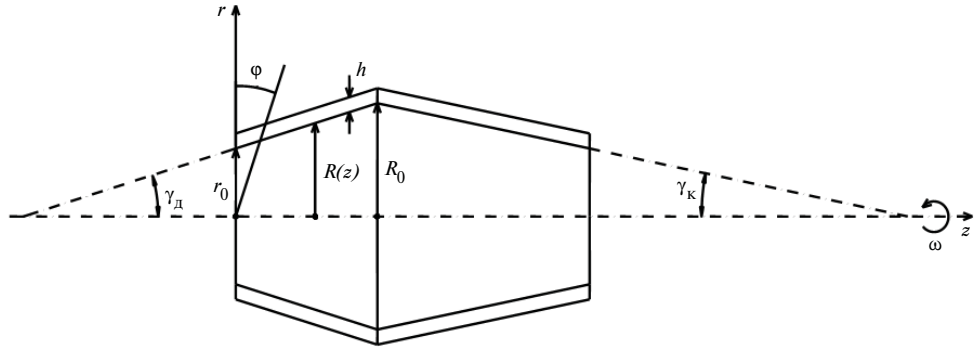


Рис. 2. Фрагмент системы диффузор-конфузор в цилиндрической системе координат

$$\left\{ \begin{aligned}
 v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{k}{\rho} \left[ A^{n-1} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial v_r}{r \partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial A^{n-1}}{\partial r} + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial A^{n-1}}{\partial z} \right]; \\
 v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \frac{k}{\rho} \left[ A^{n-1} \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \cdot \frac{\partial A^{n-1}}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial A^{n-1}}{\partial z} \right]; \\
 v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k}{\rho} \left[ A^{n-1} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial v_z}{r \partial r} \right) + 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial A^{n-1}}{\partial z} + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial A^{n-1}}{\partial r} \right]; \\
 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0; \\
 v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \frac{k}{\rho c} A^{n+1}; \\
 \frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_c}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} &= 0;
 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$z = 0: v_z = u_0; v_r = 0; v_\varphi = 0; p = p_0; T = T_0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0; \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0; \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0; \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \frac{\partial T_c}{\partial z} = 0;$$

$$r = 0: v_r = 0; v_\varphi = 0; \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0; \frac{\partial T}{\partial r} = 0;$$

$$r = R(z): v_z = 0; v_r = 0; v_\varphi = \omega R(z);$$

$$T = T_c; \lambda_{ж} \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r};$$

$$r = R(z) + h: \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r} = -\alpha(T_c - T_B),$$

где  $R(z)$  – текущий радиус трубы,  $R(z) = r_0 + ztg\gamma$ ,  $\gamma = \gamma_d$  – в случае конфузора,  $R(z) = r_0 - ztg\gamma$ ,  $\gamma = \gamma_k$  – в случае диффузора;  $u_0$  – начальная скорость;  $p_0$  – начальное давление;  $\omega$  – угловая скорость вращения трубы;  $v_r$ ,  $v_\varphi$ ,  $v_z$  – радиальная, окружная, осевая составляющие скорости;  $a$  – коэффициент температуропроводности среды,  $T$  – температура жидкости,  $T_c$  – температура стенки канала,  $c$  – удельная теплоемкость,  $T_B$  –

температура горячей воды,  $\rho$  – плотность среды,  $k$  – характеристика консистентности среды,  $A$  – интенсивность скоростей деформации:

$$A = \left[ 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Решение системы (1) будем искать в виде [1, 3]:

$$v_r = u_0 f(z, r), \quad v_\varphi = \omega R G(z, r),$$

$$v_z = u_0 H(z, r), \quad p = \rho u_0^2 F(z, r) + p_0,$$

$$t = T/T_0, \quad \theta = T_c/T_0.$$

Отобразим физическую область течения с криволинейными границами в прямоугольную, используя преобразование координат. Для этого введем замену переменных в уравнениях движения, неразрывности, энергии и теплопроводности:

$$\bar{z} = z/L; \quad \bar{r} = r/R(z); \quad \bar{R} = R(z)/L;$$

$$R^* = R^n/R^n(z); \quad \bar{z} = z/L; \quad \bar{T} = u_0^2/cT_0,$$

где  $Re = \rho u_0^{2-n} R^n / k$  – число Рейнольдса,  
 $N = \omega r / u_0$  – число закрутки.

Тогда краевая задача для безразмерных составляющих скорости и давлений имеет вид:

$$f \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + H \tilde{R} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma H \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} - N^2 \cdot \frac{G^2}{\bar{r}} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{r}} + \frac{R^*}{\operatorname{Re}} [\bar{A}_0^{n-1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{r}^2} + \bar{r}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{r}^2} + \tilde{R}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} + 2(-1)^n \operatorname{tg} \gamma \tilde{R} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} + \bar{r} \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} f \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{r}}] + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \tilde{R} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \right) \left( \tilde{R} \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{r}} \right);$$

$$f \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} + H \tilde{R} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + (-1)^n H \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} + \frac{fG}{\bar{r}} = \frac{R^*}{\operatorname{Re}} [\bar{A}_0^{n-1} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{r}^2} + \bar{r}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{r}^2} + \tilde{R}^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2} + 2(-1)^n \tilde{R} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} - \frac{G}{\bar{r}^2} \right) + \left( \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} - \frac{G}{\bar{r}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{r}}] + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \tilde{R} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \left( \tilde{R} \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{r}} \right);$$

$$f \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + H \tilde{R} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma H \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} = -\tilde{R} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{R^*}{\operatorname{Re}} [\bar{A}_0^{n-1} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}^2} + \bar{r}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}^2} + \tilde{R}^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{z}^2} + 2(-1)^n \tilde{R} \operatorname{tg} \gamma \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \tilde{R} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{r}}] + \frac{1}{\operatorname{Re}} 2 \left( \tilde{R} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} \right) \times \\ \times \left( \tilde{R} \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \bar{A}_0^{n-1}}{\partial \bar{r}} \right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{f}{\bar{r}} + \tilde{R}(z) \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} = 0;$$

$$f \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} + H \tilde{R} \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \bar{r} \operatorname{tg} \gamma H \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{Pe} \cdot \left( \bar{r}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \frac{\partial^2 t}{\partial \bar{r}^2} + \tilde{R}^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \bar{z}^2} + 2(-1)^n \tilde{R} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial^2 t}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 t}{\partial \bar{r}^2} \right) + \\ + \frac{\bar{T}}{\operatorname{Re}} A^{n+1};$$

$$\bar{r}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \tilde{R}^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} + 2(-1)^n \tilde{R} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} = 0;$$

с граничными условиями

$$\bar{z} = 0; f = 0; G = 0; H = 1; F = 0; \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0; \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0; \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = 0; t = 1;$$

$$\bar{r} = 0; f = 0; G = 0; \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} = 0; \frac{\partial F}{\partial \bar{r}} = 0; \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} = 0;$$

$$\bar{r} = R(\bar{z}); f = 0; G = 1; H = 0; \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} = -Bi(\theta - \theta_\epsilon);$$

$$\text{где } \bar{A}_0^{n-1} = \left[ 2 \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \right)^2 + 2 \left( \frac{f}{\bar{r}} \right)^2 + 2 \left( \tilde{R} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \operatorname{tg} \gamma \bar{r} \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} \right)^2 + N^2 \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} - \frac{G}{\bar{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \tilde{R} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \operatorname{tg} \gamma \bar{r} \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \right. \\ \left. + N^2 \cdot \left( \tilde{R} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + (-1)^n \operatorname{tg} \gamma \bar{r} \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} \right)^2 \right]^{(n-1)/2};$$

$$Pe = \frac{u_0 R}{a} \text{ – число Пекле; } Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda_c} \text{ – число Био.}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численная реализация математической модели позволит определить значения параметров скоростей и давлений в проточной части канала в зависимости от чисел  $Re$ , закрутки  $N$  и значений чисел  $Pe$ .

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$A$  – интенсивность скоростей деформации;  
 $a$  – коэффициент температуропроводности,  $m^2/s$ ;  
 $c$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);  
 $h$  – толщина стенки канала, м;  
 $k$  – характеристика консистенности среды, Па·с;  
 $L$  – общая длина канала типа «конфузор-диффузор», м;

$N$  – число закрутки;  
 $n$  – индекс течения;  
 $p$  – статистическое давление, Па;  
 $Re$  – число Пекле;  
 $r_0, R_0$  – наименьший и наибольший радиусы канала  
 типа «конфузор-диффузор», м;  
 $Re$  – критерий Рейнольдса;  
 $T$  – температура жидкости, К;  
 $T_c$  – температура стенки канала, К;  
 $v_r, v_\varphi, v_z$  – радиальная, окружная, осевая составляющие  
 скорости течения, м/с;  
 $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  
 $\dot{\gamma}$  – скорость сдвига, с<sup>-1</sup>;  
 $\gamma_d, \gamma_k$  – углы конусности диффузора и конфузора;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  
 $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  
 $\omega$  – угловая скорость вращения, с<sup>-1</sup>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Халатов А.А., Авраменко А.А., Шевчук И.В.** Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. Т.1. Киев, 1996. 228 с.
2. **Горская Т.Ю.** Гидродинамика ламинарного течения вязкой жидкости в теплообменных устройствах с поверхностью типа «конфузор-диффузор»: Дисс. ... канд. техн. наук. Казань, 2004. 110 с.
3. **Пантелеева Л.Р.** Теплообмен при ламинарном течении вязкой жидкости в теплообменных устройствах типа «труба в трубе» с вращающейся поверхностью «конфузор-диффузор»: Дисс. ... канд. техн. наук. Казань, 2005. 116 с.
4. **Смольский Б.М., Федоров Б.И., Полесский Э.П.** Экспериментальное исследование конвективного теплообмена кругового цилиндра в вынужденном потоке неньютоновской жидкости. – В кн.: Тепло- и массоперенос в неньютоновских жидкостях. М.: Энергия, 1968. 288 с.
5. **Назмеев Ю.Г.** Теплообмен при ламинарном течении жидкости в дискретно-шероховатых каналах. М.: Энергоатомиздат, 1998. 376 с.
6. **Мидлман С.** Течение полимеров. М.: Мир, 1971. 260 с.