УДК 532.517.4

В.И. Михин

г. Обнинск, Россия

ВТОРОГО ПОРЯДКА *k*-ε МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ, НЕ СОДЕРЖАЩАЯ МОДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

АННОТАЦИЯ

Предложена второго порядка *k*-ε модель турбулентности, полученная разложением корреляционных функций, включая тензор напряжений Рейнольдса, точных уравнений турбулентной энергии и скорости диссипации энергии несжимаемой жидкости в ряд по пространственным производным поля скорости. Разложения ограничены производными второго порядка. Член второго порядка в выражении для тензора напряжений Рейнольдса позволяет учитывать дополнительные силы, связанные с анизотропией турбулентности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные модели турбулентности [1, 2] позволяют моделировать турбулентность во всей области течения, включая вязкий подслой. Такая возможность достигается использованием в системе дифференциальных уравнений модельных функций двух аргументов: турбулентного числа Рейнольдса R_t и безразмерной пространственной координаты y^+, определяющей положение произвольной точки потока относительно ближайшей стенки канала. Полагают, что модельные функции пространственной координаты позволяют учесть влияние стенок на пространственный масштаб турбулентности и, таким образом, особенности поведения турбулентности вблизи стенок. Однако при умеренных числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \le 10^4$) влияние этой координаты на турбулентные величины может быть значительным во всей области течения [3, 4]. Это означает возможную неоднозначность результатов моделирования турбулентности в каналах сложной геометрии, в которых эта координата может определяться различными способами. Ясно, что с физической точки зрения не могут считаться вполне корректными модели, содержащие в дифференциальных уравнениях в качестве параметра пространственную координату, подобную y^+.

В [3, 4] вместо пространственной координаты использовался скалярный параметр. При физическом обосновании этого параметра, названного модифицированным турбулентным числом Рейнольдса, принято предположение, что на пространственный масштаб турбулентности влияют деформации поля средней скорости. Мерой этого влияния является отношение скорости диссипации турбулентной энергии к скорости диссипации полной кинетической энергии, включающей турбулентную составляющую и составляющую, связанную с осредненным движением. Несмотря на хорошее согласие результатов численного моделирования с экспериментальными данными, кажется довольно странным, что сами по себе транспортные уравнения не в состоянии учитывать особенности поведения турбулентности вблизи стенок без включения в систему уравнений модельных функций.

Известно, что точное транспортное уравнение для скорости диссипации турбулентной энергии, получаемое из уравнения Навье—Стокса, существенно сложнее точного уравнения для энергии и содержит дополнительные корреляционные функции по отношению к уравнению энергии. В то же время модельные транспортные уравнения для скорости диссипации конструируют по аналогии с модельным уравнением для энергии, включая в уравнения члены, соответствующие процессам конвекции, диффузии, генерации и диссипации. Возможно, это и приводит к необходимости использования модельных функций в системе дифференциальных уравнений.

В настоящей работе модельные уравнения для турбулентной энергии и скорости диссипации получены путем разложения корреляционных функций точных уравнений в ряды по пространственным производным средней скорости до второго порядка включительно. Возможность такого представления корреляционных функций является следствием следующего предположения. Корреляционные функции, получаемые усреднением соответствующих величин по статистическому ансамблю возможных мгновенных распределений скорости и давления, зависят от поля скорости, получаемого также усреднением по ансамблю. Поле средней скорости, будучи достаточно гладким, представимо в окрестности каждой точки потока в виде ряда Фурье по пространственным производным. Отсюда следует, что корреляционные функции также могут быть представлены рядами по пространственным производным средней скорости. Порядок производной определяет размер области, формирующей корреляционную функцию.

Настоящая работа содержит окончательный вариант модели турбулентности, впервые представленной в [5]. Так же как и в [5] рассматриваются течения несжимаемой жидкости.

2. ВЫВОД МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ

Для вывода модельных уравнений используем основные уравнения несжимаемой жидкости в качестве отправной точки.

Уравнение неразрывности:

$$u_{i,i} = 0 . \quad (1)$$

Уравнение Навье–Стокса:

$$u_{i,t} + u_k \cdot u_{i,k} = -\rho^{-1} \cdot p_{,i} + \nu \cdot u_{i,kk} . \quad (2)$$

Уравнение Рейнольдса:

$$U_{i,t} + U_k \cdot U_{i,k} + \partial_k \langle u'_k \cdot u'_i \rangle = -\rho^{-1} \cdot P_{,i} + \nu \cdot U_{i,kk} . \quad (3)$$

Здесь $u_i \equiv U_i + u_i'$, $p \equiv P + p'$. Как это принято, повторяющийся дважды в тензорном выражении индекс означает суммирование по этому индексу.

Из уравнений (1)–(3), используя процедуру усреднения Рейнольдса, получаем точное транспортное уравнение для турбулентной энергии:

$$\begin{aligned} k_{,t} + U_n \cdot k_{,n} = -\langle u'_i \cdot u'_n \rangle \cdot U_{i,n} - \partial_n \left\langle u'_n \cdot u'^2_i \right\rangle / 2 - \\ -\rho^{-1} \cdot \partial_n \langle u'_n \cdot p' \rangle + \nu \cdot k_{,nn} - \nu \cdot \left\langle u'^2_{i,n} \right\rangle . \end{aligned} \quad (4)$$

Первый член в правой части (4) может быть преобразован к виду

$$\langle u'_i \cdot u'_n \rangle \cdot U_{i,n} = \left(\langle u'_i \cdot u'_n \rangle - 2/3 \cdot \delta_{in} \cdot k \right) \cdot S_{in} / 2 , \quad (5)$$

где S_{ij} – тензор скорости деформации

$$S_{ij} \equiv U_{i,j} + U_{j,i} .$$

Представим тензорное выражение в правой части (5) в виде ряда по пространственным производным средней скорости. При этом заметим, что с повышением порядка производной повышается ранг связанного с этой производной тензора. Для получения тензорного выражения ранга, совпадающего с рангом тензора напряжений Рейнольдса, необходимо, чтобы тензоры с рангом выше второго входили в выражение для тензора напряжений Рейнольдса в виде сверток с некоторым вектором. Таким вектором не может быть вектор скорости, так как в этом случае мы получили бы разложение по степеням скорости. В качестве такого вектора, естественно, выбрать единичный вектор, коллинеарный вектору скорости. Именно этот вектор определяет характерное направление в заданной точке потока. Ограничиваясь членами не выше второго порядка, получаем следующее представление для тензора напряжений Рейнольдса:

$$\begin{aligned} -\left\langle u'_i \cdot u'_j \right\rangle + 2/3 \cdot \delta_{ij} \cdot k = C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \cdot S_{ij} - \\ - C_k \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\nu \cdot k}{\varepsilon} \right)^{1/2} \cdot \left(\beta_k \cdot \partial_m S_{ij} + R_{mij} \right) \cdot n_m . \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь C_μ, C_k, β_k –модельные константы; R_{mij} – симметричный по индексам i, j тензор третьего ранга, свертка которого по этим индексам равна нулю; n_i – единичный вектор, коллинеарный вектору U_i ,

$$R_{mij} \equiv U_{m,ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} U_{m,nn} ,$$

$$n_i \equiv U_i / \sqrt{U_k^2} .$$

Тензоры $\partial_m S_{ij}$ и R_{mij} в (6) являются взаимно независимыми. Любой тензор третьего ранга, удовлетворяющий необходимому условию симметрии и обращающийся в нуль в результате свертки по индексам i, j, может быть представлен в виде линейной комбинации этих тензоров. Множители выражения (6) перед производными скорости являются комбинациями турбулентных величин, потому что при исчезновении турбулентности независимо от характера поля средней скорости обращается в нуль тензор напряжений Рейнольдса. Вместо приведенных в выражении (6) множителей, в принципе, могут быть использованы любые другие, имеющие необходимую размерность. Более того, любой такой множитель может быть умножен на некоторую степень турбулентного числа Рейнольдса R_t. Единственным ограничением при этом является ограниченность отношения тензора напряжений к турбулентной энергии при стремлении R_t к бесконечности или нулю. Это ограничивает возможную форму модельных функций, если мы решили их использовать по каким-то причинам.

Разложение (6) есть расширение гипотезы Буссинеска:

$$\left\langle u'_i \cdot u'_j \right\rangle - 2/3 \cdot \delta_{ij} \cdot k = -\nu_t \cdot S_{ij} . \quad (7)$$

Соотношение Буссинеска связывает тензор напряжений Рейнольдса с тензором скорости деформации посредством эффективной турбулентной вязкости ν_t. Согласно гипотезе Колмогорова

$$\nu_t \equiv C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} .$$

Легко показать, что существует решение только с одной продольной компонентой средней скорости неравной нулю в случае развитого турбулентного течения в трубе произвольного сечения, если тензор напряжений Рейнольдса определяется гипотезой Буссинеска, и все три компоненты средней скорости отличны от нуля, если тензор напряжений определяется выражением (6).

Второй и третий члены правой части уравнения (4), имеющие дивергентную форму, представляют диффузию турбулентной энергии. Объединяем их в один диффузионный член по следующей схеме:

$$\begin{aligned} -\partial_n \left\langle u'_n \cdot u'^2_i \right\rangle / 2 - \rho^{-1} \cdot \partial_n \langle u'_n \cdot p' \rangle = \\ = -\partial_n \left\langle u'_n \cdot \left(p'/\rho + u'^2_i / 2 \right) \right\rangle = \sigma_k^{-1} \cdot \partial_n \left(\nu_t \cdot k_{,n} \right) . \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь мы вводим новую модельную константу σ_k, называемую числом Прандтля для турбулентной энергии, потому что турбулентная вязкость ν_t уже определена соотношением Буссинеска.

Последний член правой части уравнения (4), будучи всегда отрицательным, представляет скорость диссипации турбулентной энергии ε,

$$\varepsilon \equiv \nu \cdot \left\langle u'^2_{i,n} \right\rangle .$$

Таким образом, модельное транспортное уравнение для турбулентной энергии принимает форму:

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + U_n \cdot \partial_n \right) \cdot k = \\ = -\left\langle u'_i \cdot u'_j \right\rangle \cdot U_{i,j} + \partial_n \left[\left(\nu_t / \sigma_k + \nu \right) \cdot k_{,n} \right] - \varepsilon . \end{aligned} \quad (9)$$

Тензор напряжений Рейнольдса в (9) определяется разложением (6).

3. ВЫВОД МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ

Используя уравнения Навье–Стокса и Рейнольдса, получаем точное транспортное уравнение для скорости диссипации:

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon_{,t}+U_n\cdot\varepsilon_{,n}\right)/2\nu=\\&=-\left(\left\langle u'_{i,n}\cdot u'_{j,n}\right\rangle+\left\langle u'_{n,i}\cdot u'_{n,j}\right\rangle\right)\cdot U_{i,j}-\\&-\left\langle u'_n\cdot u'_{i,j}\right\rangle\cdot U_{i,jn}-\left\langle u'_{i,j}\cdot u'_{i,n}\cdot u'_{n,j}\right\rangle-\\&-\frac{1}{2}\cdot\partial_n\left\langle u'_n u'^2_{i,j}\right\rangle-\frac{1}{\rho}\cdot\partial_n\left\langle u'_{n,i}\cdot p'_{,i}\right\rangle+\\&+\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{,nn}-\nu\cdot\left\langle u'^2_{i,jn}\right\rangle.\end{aligned}\qquad(10)$$

После тождественных преобразований первый член правой части (10) принимает форму

$$\left(\left\langle u'_{i,n}\cdot u'_{j,n}\right\rangle+\left\langle u'_{n,i}\cdot u'_{n,j}\right\rangle\right)U_{i,j}=\frac{1}{2}m_{ij}S_{ij}\,,\qquad(11)$$

где

$$m_{ij}\equiv\left\langle u'_{i,n}\cdot u'_{j,n}\right\rangle+\left\langle u'_{n,i}\cdot u'_{n,j}\right\rangle-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\varepsilon}{\nu}\,.\qquad(12)$$

Разлагая симметричный тензор m_{ij} в ряд по пространственным производным средней скорости, мы используем другое возможное характерное направление при конструировании тензора второго ранга из пространственных производных скорости различного порядка. Используем единичный вектор l_i, коллинеарный градиенту турбулентной энергии:

$$l_i\equiv k_{,i}/\sqrt{k^2_{,n}}\,.$$

Ограничивая ряд производными второго порядка, получаем соотношение

$$\begin{aligned}&-2\cdot\nu\cdot m_{ij}=C_{\varepsilon1}\cdot\nu_t\cdot\frac{\varepsilon}{k}\cdot S_{ij}-\\&-C_{\varepsilon3}\cdot k\cdot\left(\frac{\nu\cdot k}{\varepsilon}\right)^{1/2}\cdot\partial_m S_{ij}\cdot l_m,\end{aligned}\qquad(13)$$

где $C_{\varepsilon1}$, $C_{\varepsilon3}$ – новые модельные константы. Заметим, что ранее, в [5], вместо l_i использовался градиент временного масштаба турбулентности τ_u .

После тождественных преобразований второй член правой части (10) принимает форму

$$\begin{aligned}&\left\langle u'_n\cdot u'_{i,j}\right\rangle\cdot U_{i,jn}=\frac{1}{2}\cdot r_{ijk}\cdot R_{ijk}+\\&+\frac{1}{3}\cdot\partial_k\left\langle u'_k\cdot u'_i\right\rangle\cdot U_{i,nn}\,,\end{aligned}\qquad(14)$$

где

$$r_{ijk}\equiv\left\langle u'_k\cdot u'_{i,j}\right\rangle+\left\langle u'_j\cdot u'_{i,k}\right\rangle-\frac{2}{3}\delta_{jk}\partial_n\left\langle u'_n\cdot u'_i\right\rangle.\qquad(15)$$

Вследствие коммутативности операций дифференцирования и усреднения по ансамблю свертка тензора третьего ранга r_{ijk} по индексам j, k равна нулю. Таким образом, тензор r_{ijk} уже частично определен тензором напряжений $<u'_i\cdot u'_j>$. Здесь мы делаем предположение, согласно которому

$$r_{ijk}=-C_{\varepsilon4}\nu_t\left(\beta_\varepsilon\partial_i S_{jk}+R_{ijk}\right).\qquad(16)$$

Третий член правой части уравнения (10) является скаляром. Выражаем этот скаляр через производные средней скорости S_{ij} и R_{ijk} , осуществляя свертку соответствующих тензоров по всем индексам:

$$\begin{aligned}&-2\cdot\nu\cdot\left\langle u'_{i,j}\cdot u'_{i,n}\cdot u'_{n,j}\right\rangle=-C_{\varepsilon5}\cdot\frac{\nu\cdot\varepsilon}{k}\cdot S^2_{ij}+\\&+C_{\varepsilon6}\cdot\nu^2\cdot R^2_{ijk}\end{aligned}\,.\qquad(17)$$

Квадрат тензора S_{ij} представляет собой диссипацию кинетической энергии осредненного движения, вызванную превращением энергии движения в энергию турбулентности. Этим определяется знак и характер множителя (положительная степень ε) первого слагаемого правой части выражения (17). Второе слагаемое правой части (17) взято с противоположным знаком. Это сделано потому, что рассматриваемая корреляционная функция может менять знак в зависимости от характера поля средней скорости. Более того, множителем второго слагаемого является квадрат кинематической вязкости, но не комбинация турбулентных величин. Здесь возможно исключение из общего правила, так как рассматриваемая корреляционная функция входит только в уравнение для скорости диссипации и соответствующее слагаемое, если оно отлично от нуля, ведет к увеличению ε соответственно к уменьшению турбулентной энергии.

Четвертый и пятый члены правой части уравнения (10), имеющие дивергентную форму, объединяем в один диффузионный член:

$$\begin{aligned}&-\partial_n\left\langle u'_n\cdot u'^2_{i,j}\right\rangle/2-\partial_n\left\langle u'_{n,i}\cdot p'_{,i}\right\rangle/\rho=\\&=\frac{1}{2\cdot\nu}\cdot\partial_n\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\cdot\varepsilon_{,n}\right).\end{aligned}\qquad(18)$$

Здесь введена модельная константа σ_ε , называемая числом Прандтля для скорости диссипации.

Последний член правой части уравнения (10), всегда отрицательный и отличный от нуля даже при однородном поле средней скорости, представляем как диссипативный, полагая

$$2\cdot\nu^2\cdot\left\langle u'^2_{i,jn}\right\rangle=C_{\varepsilon2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{k}\,,\qquad(19)$$

где $C_{\varepsilon2}$ – модельная константа. Модельное уравнение для скорости диссипации принимает вид:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{,t}+U_n\cdot\varepsilon_{,n}=-2\cdot\nu\cdot m_{ij}\cdot U_{i,j}-\nu\cdot r_{ijk}\cdot U_{i,jk}-\\&-\frac{2}{3}\cdot\nu\cdot\partial_k\left\langle u'_k\cdot u'_i\right\rangle\cdot U_{i,nn}-2\cdot\nu\cdot\left\langle u'_{i,j}\cdot u'_{i,n}\cdot u'_{n,j}\right\rangle+\\&+\partial_n\left[\left(\nu_t/\sigma_\varepsilon+\nu\right)\cdot\varepsilon_{,n}\right]-C_{\varepsilon2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{k}.\end{aligned}\qquad(20)$$

Корреляционные функции в (20) определяются соотношениями (6), (13), (16) и (17).

4. МОДЕЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ

Модельные константы определены путем сравнения с известными полуэмпирическими и экспериментальными данными результатов моделирования развитого турбулентного течения в плоском канале:

$C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon1} = 1.5$, $C_{\varepsilon2} = 1.9$, $C_{\varepsilon3} = 0.02$, $C_{\varepsilon4} = 2$, $C_{\varepsilon5} = 0.09$, $C_{\varepsilon6} = 24$, $\sigma_k = 1.4$, $\sigma_\varepsilon = 1.4$.

Константы C_μ, $C_{\varepsilon1}$, $C_{\varepsilon2}$, σ_k и σ_ε сохранили свои общепринятые значения [1–4]. Константы $C_{\varepsilon3}$, $C_{\varepsilon4}$, $C_{\varepsilon5}$ и $C_{\varepsilon6}$ присущи предлагаемой модели, также как и константы β_k и β_ε. Константы β_k и β_ε определяют форму вторых производных скорости в соотношениях (6) и (16). Значения этих двух последних констант приняты равными нулю. Константы $C_{\varepsilon3}$ и $C_{\varepsilon6}$ взаимно зависимы. Второго порядка член корреляционной функции (16) слегка улучшает профиль скорости в круглой трубе и кольцевом канале. Полагая $C_{\varepsilon3} = 0$ и, таким образом, пренебрегая этим членом, мы должны принять значение $C_{\varepsilon6}$ равным 25 вместо 24. Отметим также, что $C_{\varepsilon3} = 0.02$ значительно ниже величины, приведенной в [5]. Это отличие обусловлено существенной модификацией корреляционной функции (13).

Член второго порядка в правой части (6) не влияет на распределения скорости и, следовательно, на коэффициенты гидравлического сопротивления каналов, обладающих высокой симметрией (например, плоский канал). Однако даже в таких каналах диагональные компоненты напряжений Рейнольдса взаимно различны. На основании сравнения диагональных напряжений Рейнольдса в плоском канале с экспериментальными данными [6], а также на основании результатов моделирования турбулентных течений в каналах с обратным выступом можно рекомендовать $C_k = 0.4 – 0.5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена k-ε модель турбулентности второго порядка. Эта модель получена разложением корреляционных функций точных уравнений турбулентной энергии и скорости диссипации энергии несжимаемой жидкости в ряд по пространственным производным поля скорости, усредненного по статистическому ансамблю. Предложенная модель содержит только модельные константы и не содержит модельные функции.

Тензор напряжений Рейнольдса представлен соотношением, содержащим пространственные производные средней скорости первого и второго порядков. Пренебрежение производными второго порядка превращает это соотношение в соотношение Буссинеска, связывающее напряжения Рейнольдса с тензором скорости деформаций посредством эффективной турбулентной вязкости. Эффективная турбулентная вязкость является линейной функцией турбулентного числа Рейнольдса. Более высокий порядок разложения тензора напряжений Рейнольдса в ряд по производным средней скорости позволяет учитывать дополнительные силы, обусловленные анизотропией турбулентности.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

u_i – компонента скорости, i=1,2,3;
U_i – скорость, усредненная по ансамблю;
u'_i – турбулентные пульсации скорости u_i;
p – давление;
P – давление, усредненное по ансамблю;
p' – турбулентные пульсации давления;
$\langle u_i u_j \rangle$ – среднее по ансамблю произведение компонент скорости;
k – турбулентная энергия, $k \equiv \langle u_i' \cdot u_i' \rangle / 2$;
ε – скорость диссипации турбулентной энергии, $\varepsilon \equiv \nu \langle u'_{i,j}\, u'_{i,j} \rangle$;
ρ – плотность;
δ_{ij} – симметричный единичный тензор;
ν, ν_t – кинематическая молекулярная и турбулентная вязкости;
R_t – турбулентное число Рейнольдса, $R_t \equiv k^2/\varepsilon\nu$;
u_τ – масштаб скорости, основанный на напряжении трения, $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$;
τ_u – временной масштаб турбулентности, $\tau_u = k / \varepsilon$;
τ_w – напряжение трения на стенке;
y^+ – безразмерное расстояние до стенки канала, $y^+ = y\, u_\tau / \nu$;
Re – число Рейнольдса, основанное на средней скорости и гидравлическом диаметре канала.

Операторы производных:

$$k_{,t} = \partial_t k \equiv \partial k / \partial t; \quad k_{,i} = \partial_i k \equiv \partial k / \partial x_i, \quad i = 1,2,3.$$

$$u_{i,t} = \partial_t u_i \equiv \partial u_i / \partial t, \quad u_{i,k} = \partial_k u_i \equiv \partial u_i / \partial x_k, \ i,k = 1,2,3.$$

$$u_{i,jk} = \partial_{jk} u_i \equiv \partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_k, \quad i,j,k = 1,2,3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abe K., Kondoh T., Nagano Y.** A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows -1. Flow field calculations // Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 37, № 1. P. 139–151, 1994.
2. **Sato H., Shimada M., Nagano Y.** A two-equation turbulence model for predicting heat transfer in various Prandtl number fluids // Proceedings of the Tenth International Heat Transfer Conference, 1994, Brighton, UK. Vol.2. P. 443–448.
3. **Михин В.И.** Низкорейнольдсова k-ε модель турбулентности с модельными функциями, не содержащими пространственной координаты в качестве аргумента. Препринт ФЭИ-2654. Обнинск, 1997.
4. **Михин В.И.** Низкорейнольдсова k-ε модель турбулентности, не содержащая “пристенные” модельные функции// Труды Третьей Российской национальной конференции по теплообмену, 2002, Москва, Т. 2. С. 224–227.
5. **Михин В.И.** Второго порядка k-ε модель турбулентности// VI Международный конгресс по математическому моделированию. Сентябрь 20–26, 2004, Нижний Новгород, Россия.
6. **Конт-Белло Ж.** Турбулентное течение в каналах с параллельными стенками. М.: Мир, 1968.