

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДИСПЕРСНЫХ ТЕЧЕНИЙ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены современные методы моделирования двухфазных дисперсных турбулентных течений и статистические модели на основе кинетических уравнений для функции плотности вероятности скорости и температуры частиц дисперсной фазы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двухфазные дисперсные течения встречаются во многих природных и технических условиях, и практически всегда такие течения являются турбулентными. В настоящее время двухфазные турбулентные течения представляют собой один из наиболее интенсивно развивающихся разделов механики и теплообмена. В данном обзоре представлены современные методы моделирования двухфазных дисперсных турбулентных течений и статистические модели, основанные на кинетических уравнениях для функции плотности вероятности (ФПВ) скорости и температуры частиц дисперсной фазы.

Расчет двухфазного течения должен включать моделирование переноса массы, импульса и тепла для каждой из фаз, а также межфазного взаимодействия. Основные принципиальные трудности, возникающие при построении теории двухфазных дисперсных турбулентных потоков, связаны с турбулентным характером движения среды и взаимодействием частиц между собой и с ограничивающими поверхностями. Прежде всего нужно отметить, что к настоящему времени далеко от завершения даже построение теории однофазных турбулентных потоков, хотя для описания таких течений предложен целый ряд достаточно эффективных моделей и расчет многих из них не вызывает принципиальных сложностей. Несмотря на то, что первая работа по теории дисперсных турбулентных течений появилась относительно давно [1], интенсивное развитие этой области механики и теплообмена началось только в последние 20 лет. Основные теоретические проблемы, возникающие при моделировании двухфазных дисперсных турбулентных течений по сравнению с однофазными, связаны со следующими физическими процессами: взаимодействием частиц (капель, пузырьков) с турбулентными вихрями сплошной фазы; взаимодействием частиц друг с другом в результате столкновений; эволюцией спектра частиц по размерам вследствие горения, фазовых переходов, коагуляции или дробления; влиянием турбулентных флуктуаций на скорости гетерогенного горения и фазовых переходов; взаимодействием частиц с ограничивающей поток поверхностью и осаждением; обратным влиянием час-

тиц на турбулентность; дисперсией, аккумулярованием и флуктуациями концентрации частиц.

Образование *кластеров* – компактных областей со значительно повышенной концентрацией дисперсной фазы, окруженных зонами с низкой концентрацией, – представляет собой одно из наиболее интересных и сложных явлений, обусловленных взаимодействием частиц с турбулентными вихрями [2]. Следует различать два класса течений, в которых могут образовываться кластеры: неоднородные и однородные турбулентные потоки. Явление кластеризации (аккумуляции) тяжелых частиц в неоднородных турбулентных потоках объясняется их турбулентной миграцией (*турбофорезом*) из области с высокой интенсивностью турбулентных пульсаций скорости в зону с низкой степенью турбулентности [3, 4]. Однако эффект кластеризации инерционных частиц имеет место и в однородной турбулентности, где отсутствуют градиенты пульсаций скорости несущего потока и, следовательно, механизм транспорта частиц под действием турбофореза в его традиционном понимании не имеет места. Образующиеся кластерные структуры могут иметь меньшую фрактальную размерность, чем размерность физического пространства [5]. Кластеризация частиц в теоретических моделях, предложенных для расчета столкновений, дисперсии, седиментации и коагуляции частиц в турбулентных потоках, обычно не учитывается. Эти модели, как правило, основаны на предположении, что частицы случайным образом равномерно распределены в пространстве, и, следовательно, эффект аккумуляции полностью игнорируется. Однако, несмотря на стохастическую природу турбулентности, распределение инерционных частиц в турбулентных потоках не является случайным и эффект аккумуляции в существенной степени обусловлен инерцией частиц при их взаимодействии с когерентными вихревыми структурами турбулентной сплошной среды.

Явление аккумуляции инерционных частиц в результате турбулентных флуктуаций концентрации может иметь место в самых различных физических процессах: от горения твердого и жидкого топлива до формирования планет из туманности [6]. Особенно существенную роль эффект аккумуляции частиц играет в атмосферных процессах при больших числах Рейнольдса. По-видимому, только учет этого эффекта при расчете скорости коагуляции позволяет объяснить феномен быстрого роста капель в дождевых облаках [7, 8], а также отклонение от экспоненциального закона *Beer-Lambert* для

затухания излучения в запыленной среде [9]. Поэтому одним из главных направлений развития методов математического моделирования двухфазных дисперсных систем является разработка рациональных подходов для предсказания аккумуляции (кластеризации) частиц в неоднородных и однородных турбулентных потоках. В частности, как показано в [10] и других работах, аккумуляция (*segregation*) инерционных частиц в пристеночных течениях возникает благодаря их взаимодействию с когерентными вихревыми структурами. Следовательно, развиваемые теоретические модели должны адекватно описывать и учитывать эффекты взаимодействия частиц с когерентными структурами.

2. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Существующие методы расчета двухфазных дисперсных турбулентных течений могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся работы, основанные на *лагранжевом траекторном* описании дисперсной фазы – решении уравнений движения и энергии вдоль траекторий отдельных частиц. Учет в рамках такого подхода случайного характера движения частиц, обусловленного взаимодействием с турбулентными вихрями несущего потока, в результате интегрирования динамических стохастических уравнений типа Ланжевена вдоль индивидуальных траекторий с последующим осреднением решений по ансамблю начальных данных приводит к существенному увеличению объема вычислений, т.к. для получения статистически достоверной информации необходимо использовать достаточно представительный ансамбль реализаций. Детерминированное лагранжево описание движения и теплообмена дисперсной фазы в турбулентном потоке на основе решения уравнений только для средних величин, т.е. без учета взаимодействия со случайными полями пульсаций скорости и температуры сплошной фазы, может быть оправданным (хотя и не всегда) только для очень инерционных частиц, время релаксации которых намного больше интегрального масштаба турбулентности и которые поэтому слабо вовлекаются в турбулентное движение. С уменьшением размера частиц репрезентативное число реализаций должно возрастать, т.к. увеличивается вклад взаимодействия частиц с вихрями все меньших размеров. Трудоемкость динамического лагранжево моделирования в значительной степени увеличивается в высококонцентрированных дисперсных потоках вследствие возрастания «запутанности» траекторий из-за столкновений частиц, а также при изменении числа (рождения или исчезновения) частиц в результате коагуляции, дробления, спонтанного зародышеобразования и т.д. Лагранжев траекторный подход позволяет получать детальную информацию о взаимодействии частиц с турбулентными вихрями, со стенками и друг с другом, однако требует очень больших затрат времени при расчете сложных течений, встречающихся в природных или промышленных условиях.

Другой метод моделирования основан на *эйлеровом континуальном* описании обеих фаз – на так называемых *двухжидкостных моделях* в рамках механики взаимопроникающих гетерогенных сред. Существенным преимуществом эйлерова континуального подхода по сравнению с лагранжевым траекторным моделированием является использование балансных уравнений одного типа для обеих фаз и соответственно единого алгоритма решения всей системы уравнений. Кроме того, описание динамики очень мелких частиц не вызывает никаких принципиальных трудностей, т.к. при стремлении массы частицы к нулю осуществляется предельный переход к задаче о турбулентной диффузии безынерционной (пассивной) примеси. И, наконец, учет столкновений и изменения числа частиц в рамках континуального подхода не приводит к такому значительному росту объема и усложнению вычислений, как при лагранжевом моделировании.

В целом, лагранжев траекторный и эйлеров континуальный методы моделирования дополняют друг друга, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки и, следовательно, свои области приложения. Лагранжев метод применим для существенно неравновесных течений (крупные инерционные частицы, разреженные дисперсные среды), а эйлеров метод справедлив в условиях, близких к равновесным (мелкие малоинерционные частицы, концентрированные дисперсные среды). Поскольку дисперсная фаза одновременно обладает свойствами континуума и дискретных частиц, ситуация с этими двумя подходами несколько напоминает известный дуализм «волна–частица» в микромире. Поэтому в [11] был предложен гибридный лагранжево-эйлеров метод, сочетающий детальность лагранжево и эффективность эйлерова подходов к описанию дисперсной фазы.

Наиболее точная и детальная информация о структуре турбулентного двухфазного потока может быть получена на основе применения метода прямого численного моделирования (*DNS*) для несущей сплошной среды в сочетании с лагранжевым стохастическим подходом для дисперсной фазы. При прямом численном моделировании описывается весь спектр турбулентных вихрей, включая мелкомасштабные, ответственные за диссипацию энергии турбулентности. Однако *DNS* требует больших затрат времени даже при привлечении самых быстрых компьютеров и поэтому используется главным образом как численный эксперимент для валидации или калибровки более экономичных методов расчета турбулентных течений. В методе крупных вихрей (*LES*) производится прямое моделирование только крупных вихрей, пространственный масштаб которых превышает размер численной сетки, а мелкомасштабные (подсеточные) моды оказываются вне пределов разрешимости и описываются полуэмпирическим путем. *LES* применим для моделирования поведения частиц, время динамической релаксации которых много больше временного масштаба турбулентности [12–14]. Это огра-

нение вытекает из требования, чтобы вклад подсеточных флуктуаций (т.е. мелкомасштабной турбулентности) в статистику дисперсной фазы был пренебрежимо мал и определяющую роль играло взаимодействие частиц с крупномасштабными энергосодержащими турбулентными вихрями. Однако даже применение *LES* для сплошной среды в сочетании с лагранжевым стохастическим подходом для дисперсной фазы все равно может оказаться слишком дорогостоящим инструментом для практических приложений. Поэтому в работах [15–19] развиваются перспективные методы, основанные на использовании *DNS* и *LES* в рамках континуального двухжидкостного подхода. Эффективным базисом для развития прямых континуальных и комбинированных лагранжево-эйлеровых методов моделирования дисперсных течений представляется теоретический формализм, состоящий в разложении поля скорости частиц в турбулентном потоке на «коррелированную» и «квазиброуновскую» составляющие скорости [20, 21].

При моделировании движения частиц в разреженной дисперсной среде, т.е. при небольшой объемной концентрации дисперсной фазы, основное внимание должно уделяться взаимодействию частиц с турбулентными вихрями несущего потока, поскольку роль взаимодействия частиц между собой незначительна. Однако с повышением концентрации и размера частиц возрастает вклад межчастичных взаимодействий в перенос импульса и энергии дисперсной фазы. Хаотическое движение частиц, обусловленное их взаимодействием, получило название *псевдотурбулентности* (чтобы отличить от турбулентного движения частиц, связанного с их вовлечением в турбулентное движение несущего потока). Причиной возникновения псевдотурбулентных флуктуаций может явиться как гидродинамическое взаимодействие между частицами, реализуемое посредством обмена импульсом и энергией со случайными полями скорости и давления окружающей среды [22, 23], так и непосредственное взаимодействие в результате столкновений. С ростом концентрации и размера частиц роль обмена импульсом и энергией между частицами в результате столкновений по сравнению с гидродинамическим взаимодействием возрастает. В концентрированных дисперсных средах определяющую роль в формировании статистических свойств системы играют межчастичные столкновения, и теоретический анализ этой проблемы подобен аналогичной кинетической проблеме в теории молекулярного движения газа [24, 25]. Процессы взаимодействия частиц с турбулентными вихрями и межчастичных столкновений можно считать независимыми только в случае очень инерционных частиц, время динамической релаксации которых много больше характерного времени взаимодействия с турбулентными вихрями, и поэтому их относительное движение некоррелировано и аналогично хаотическому движению молекул. В случае малоинерционных частиц необходимо учитывать взаимное влияние взаимо-

действий «частица–турбулентность» и «частица–частица».

Как уже отмечалось, вычислительные трудности лагранжева траекторного моделирования резко возрастают с увеличением концентрации дисперсной фазы. Это связано, в первую очередь, с необходимостью одновременного расчета траекторий очень большого числа частиц, участвующих в разыгрываемой ситуации. Эффективный способ преодоления этих трудностей был предложен в [26, 27] путем замены коллектива сталкивающихся частиц моделированием движения образцовой частицы с введением плотности вероятности соударений с фиктивными (виртуальными) частицами. Эффективным подходом для моделирования соударений частиц является также применение метода *Monte Carlo* [28–30]. Однако и в этих подходах с увеличением концентрации необходимое количество расчетных траекторий для получения статистически достоверного ансамбля реализаций должно возрастать. Поэтому область применения эйлерова континуального метода моделирования расширяется с ростом концентрации дисперсной фазы, когда увеличивается частота межчастичных столкновений.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Статистический подход на основе функций распределения в фазовом пространстве является мощным инструментом построения теоретических моделей в различных областях физики: молекулярная теория газов и жидкостей (уравнение Больцмана и цепочка уравнений Боголюбова—Борна—Грина—Кирквуда), движение броуновских частиц (уравнение Фоккера—Планка), физика плазмы (кинетическое уравнение Власова), теория коагуляции (уравнение Смолуховского—Мюллера) и т.д. Подход, базирующийся на кинетических уравнениях для плотностей вероятности распределений скоростей, температур и других представляющих интерес характеристик частиц дисперсной фазы, является наиболее последовательным методом построения континуальных моделей, т.е. определения системы уравнений гидродинамики и теплопереноса для дисперсной фазы. Впервые такой подход для описания псевдотурбулентного течения дисперсной среды, флуктуации параметров которой обусловлены случайной конфигурацией частиц, был применен, по-видимому, в [31] на основе классического уравнения Фоккера—Планка. Введение ФПВ позволяет получить статистическое описание ансамбля частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе уравнений движения и теплопереноса типа Ланжевена. Естественно, при статистическом моделировании на основе ФПВ происходит некоторая потеря информации в отношении индивидуальных особенностей поведения отдельных частиц. Однако эта «неполнота» динамической информации в поведении отдельных частиц компенсируется увеличением информации о статистических закономерностях движения и теплообмена коллектива частиц (дисперсной фазы в целом).

Применение статистического метода на основе кинетических уравнений позволяет единым образом описывать взаимодействия частиц с турбулентностью, столкновения частиц друг с другом, взаимодействие частиц со стенкой и другие процессы в турбулентных дисперсных потоках.

Одноточечные кинетические уравнения для ФПВ распределений скорости и температуры частиц в турбулентном потоке получены в работах [32–40] при помощи функционального формализма, основанного на формуле Фурутцу—Донскера—Новикова для гауссовых случайных полей. В [41] построено кинетическое уравнение ФПВ скорости частиц, используя принцип инвариантности к случайному галилееву преобразованию, а в [42] — на основе суммирования прямых взаимодействий лагранжевым методом ренормализационной теории возмущений. Этот метод был использован также в [43] для вывода уравнения для совместной ФПВ распределений скорости и температуры частиц. Альтернативный метод построения замкнутого кинетического уравнения на основе разложения характеристического функционала в ряд по кумулянтам развит в работах [44, 45]. При моделировании турбулентности гауссовыми случайными полями все три метода (функциональный формализм с учетом формулы Фурутцу—Донскера—Новикова, суммирование прямых взаимодействий и разложение по кумулянтам) приводят к эквивалентным кинетическим уравнениям для частиц, однако последние два метода не ограничены случаем гауссовых функций. В работах [45–48] построены более общие кинетические уравнения, список независимых переменных которых (координат в фазовом пространстве) включает кроме координаты и скорости частицы также координаты и скорости элементов сплошной среды, движущихся по траекториям как жидких, так и инерционных частиц. Движение жидких частиц вдоль собственных траекторий моделируется на основе линейного стохастического уравнения со случайной силой, задаваемой в виде гауссова белого шума, т.е. описываемой *винеровским процессом* [49]. Задача моделирования турбулентных характеристик жидких частиц, движущихся по траекториям инерционных частиц, является более сложной, поскольку необходимо учитывать так называемые эффекты *пересечения траекторий, инерционности и неразрывности* [50].

Следует отметить, что существует целый ряд явлений (например, столкновения и коагуляция частиц, аккумулярование и повышение скорости седиментации частиц в однородной турбулентности, влияние частиц на диссипацию турбулентной энергии), которые в принципе не могут быть описаны на основе *одноточечных* статистических моделей. Это обусловлено тем фактом, что с ростом инерционности увеличивается размер области, о которой частица сохраняет «память» в результате взаимодействия с турбулентной жидкостью. Поэтому применение *двухточечных* моделей для описания статистики инерционных частиц существенно более актуально,

чем в теории однофазной турбулентности. Двухточечные статистические модели на основе кинетических уравнений для ФПВ скоростей двух частиц или их относительной скорости предложены в [51–55].

В качестве иллюстрации на рис. 1 и 2 показано сравнение результатов, предсказываемых двухточечными статистическими моделями [52–54] для монодисперсных частиц в изотропной турбулентности, с данными [56, 57], полученными путем прямого моделирования на основе *DNS* для сплошной фазы в сочетании с лагранжевым траекторным методом для дисперсной фазы. На рис. 1 показано влияние числа Стокса на радиальную функцию распределения. Радиальная функция распределения Γ определяется как отношение плотности вероятности обнаружения пары частиц к соответствующей величине в однородной суспензии и характеризует эффект аккумулярования (кластеризации) частиц. Число Стокса St характеризует инерционность частиц и равняется отношению времени динамической релаксации частицы к колмогорову временному масштабу турбулентности. Очевидно, что в предельных случаях мало- и высокоинерционных частиц поле концентрации статистически однородно и, следовательно, $\Gamma=1$. В соответствии с данными численного моделирования радиальная функция распределения проходит через максимум по мере возрастания времени релаксации частиц. Как видно из рис. 1, положение максимума соответствует значению числа St , близкому к единице (т.е. при совпадении времени динамической релаксации частиц и временного колмогоровского микромасштаба турбулентности.), что свидетельствует об определяющей роли мелкомасштабных турбулентных структур в формировании явления кластеризации частиц. Это явление может быть интерпретировано как результат миграции частиц под действием силы турбофореза в пространстве относительного движения пары частиц. Эта сила стремится уменьшить расстояние между двумя частицами, т.е. вызывает «притяжение» частиц друг к другу вследствие их взаимодействия с турбулентными вихрями.

На рис. 2 показано влияние числа Стокса на ядро столкновений инерционных частиц, отнесенное к ядру столкновений для безынерционных частиц [58]. Видно, что для малоинерционных частиц влияние числа Рейнольдса исчезает и ядро столкновений хорошо обобщается при помощи колмогоровских микромасштабов. Напротив, интенсивность столкновений высокоинерционных частиц управляются макромасштабами турбулентности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку дисперсная фаза одновременно обладает свойствами континуума и дискретных частиц, то целесообразно развивать гибридные лагранжево-эйлеровы методы моделирования гидродинамики и теплообмена дисперсной фазы.

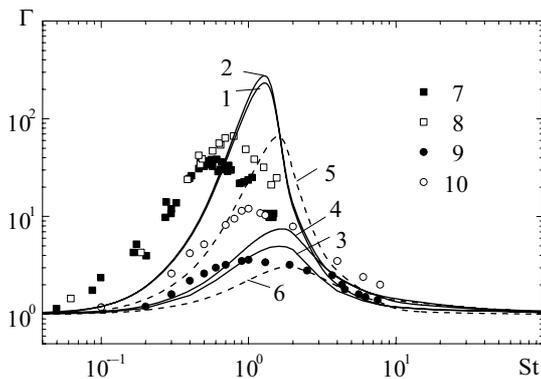


Рис. 1. Зависимость радиальной функции распределения от числа Стокса: 1–6 – двухточечные статистические модели; 7, 8 – [56]; 9, 10 – [57]

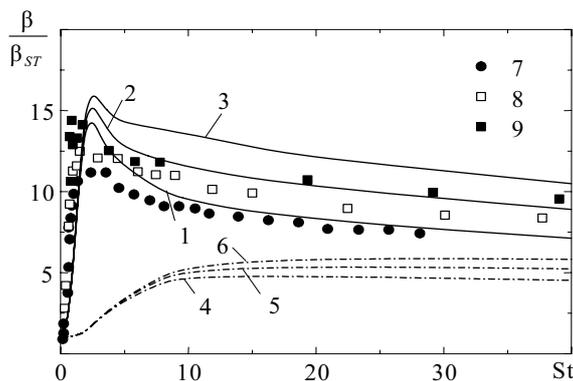


Рис. 2. Зависимость ядра столкновений от числа Стокса: 1–3 и 4–6 – двухточечные статистические модели с учетом и без учета эффекта аккумуляции; 7–9 – [57]; 1, 4, 7 – $Re_\lambda = 45$; 2, 5, 8 – $Re_\lambda = 58$; 3, 6, 9 – $Re_\lambda = 75$

Наиболее последовательным методом построения эйлеровых континуальных моделей для описания дисперсной фазы является статистический подход на основе кинетических уравнений для ФПВ.

Двухточечные статистические модели могут использоваться для эффективного учета взаимодействия частиц с мелкомасштабными вихрями для определения вклада подсеточной турбулентности в рамках метода крупных вихрей.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- Re_λ – число Рейнольдса, построенное по тейлорову пространственному масштабам;
 St – число Стокса;
 β – ядро столкновений, m^3/c ;
 Γ – радиальная функция распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке // ПММ. 1953. Т. 17. С. 261–274.
2. Squires K.D., Eaton J.K. Preferential concentration of particles by turbulence // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. P. 1169–1178.

3. Caporaloni M., Tampieri F., Trombetti F., Vittori O. Transfer of particles in nonisotropic air turbulence // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32. P. 565–568.
4. Reeks M.W. The transport of discrete particles in inhomogeneous turbulence // J. Aerosol Sci. 1983. V. 14. P. 729–739.
5. Bec J. Fractal clustering of inertial particles in random flows // Phys. Fluids. 2003. V. 15. P. L81–L84.
6. Cuzzi J.N., Hogan R.C., Paque J., Dobrovolskis A. Size-selective concentration of chondrules and other small particles in protoplanetary nebula turbulence // Astrophys. J. 2001. V. 546. P. 496–508.
7. Pinsky M.B., Khain A.P. Turbulence effects on droplet growth and size distribution in clouds // J. Aerosol Sci. 1997. V. 28. P. 1177–1214.
8. Falkovich G., Fouxon A., Stepanov M.G. Acceleration of rain initiation by cloud turbulence // Nature. 2002. V. 419. P. 151–154.
9. Shaw R.A., Kostinski A.B., Lanterman D.D. Super-exponential extinction in a negatively correlated random medium // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2002. V. 75. P. 13–20.
10. Marchioli C., Soldati A. Mechanisms for particle transport and segregation in a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 2002. V. 468. P. 283–315.
11. Pialat X., Simonin O., Villedieu P. Direct coupling between Lagrangian and Eulerian approaches in turbulent gas-particle flows // Proc. ASME Fluids Eng. Summer Conf. FEDS2005–77078. Houston, USA. 2005.
12. Armenio M., Piomelli U., Fiorotto V. Effect of subgrid scales on particle motion // Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 3030–3042.
13. Boivin M., Simonin O., Squires K.D. On the prediction of gas–solid flows with two-way coupling using large eddy simulation // Phys. Fluids. 2000. V. 12. P. 2080–2090.
14. Kuerten J.G.M., Vreman A.W. Can turbophoresis be predicted by large-eddy simulation? // Phys. Fluids. 2005. V. 17. P. 011701-1–011701-4.
15. Druzhinin O.A., Elghobashi S.E. Direct numerical simulation of bubble-laden turbulent flows using the two-fluid formulation // Phys. Fluids. 1998. V. 10. P. 685–697.
16. Ferry J., Balachandar S. A fast Eulerian method for disperse two-phase flow // Intern. J. Multiphase Flow. 2001. V. 27. P. 1199–1226.
17. Pandya R.V.R., Mashayek F. Two-fluid large-eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2002. V. 45. P. 4753–4759.
18. Kaufman A., Simonin O., Poinot T. Direct numerical simulation particle-laden homogeneous isotropic turbulent flows using two-fluid model formulation // Proc. 5th Intern. Conference on Multiphase Flow. Yokohama, Japan. 2004. Paper № 443.
19. Moreau M., Bedat B., Simonin O. From Euler-Lagrange to Euler-Euler large-eddy simulation approaches for gas-particle turbulent flows // Proc. ASME Fluids Eng. Summer Conf. FEDS2005–77306. Houston, USA. 2005.
20. Simonin O., Février P., Laviéville J. On the spatial distribution of heavy particle velocities in turbulent flow: From continuous field to particulate chaos // J. Turbulence. 2002. V. 3 (040).
21. Février P., Simonin O., Squires K.D. Partitioning of particle velocities in gas–solid turbulent flows into a continuous field and a spatially-uncorrelated random distribution: theoretical formalism and numerical study // J. Fluid Mech. 2005. V. 533. P. 1–46.

22. **Buyevich Y.A.** Statistical hydromechanics of disperse systems. Pt 3. Pseudo-turbulent structure of homogeneous suspensions // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 56. P. 313–336.
23. **Koch D.L.** Kinetic theory for a monodisperse gas-solid suspension // *Phys. Fluids A.* 1990. V. 2. P. 1711–1723.
24. **Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurnyi N.** Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow an slightly inelastic particles in a general flow field // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 223–256.
25. **Ding J., Gidaspow D.** A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow // *AIChE J.* 1990. V. 36. P. 523–538.
26. **Oesterlé B., Petitjean A.** Simulation of particle-to-particle interactions in gas–solid flows // *Intern. Conf. on Multiphase Flows.* Tsukuba, Japan. 1991. P. 91–94.
27. **Sommerfeld M., Zivkovic G.** Recent advances in the numerical simulation of pneumatic conveying through pipe systems // *Computational Methods in Applied Sciences.* Amsterdam: Elsevier. 1992. P. 201–212.
28. **Tanaka T., Kiribayashi K., Tsuji Y.** Monte Carlo simulation of gas–solid flow in a vertical pipe or channel // *Intern. Conference on Multiphase Flows.* Tsukuba, Japan. 1991. P. 439–442.
29. **Fede P., Simonin O., Villedieu Ph.** Monte Carlo simulation of colliding particles in gas-solid turbulent flows from a joint fluid-particle PDF equation // *Proc. ASME Joint US–European Fluids Eng. Conf. FEDSM2002–31226.* Montréal, Canada. 2002.
30. **Moreau M., Fede P., Simonin O., Villedieu Ph.** Stochastic Lagrangian modelling and Monte Carlo simulation of collisions in gas-solid homogeneous shear turbulent flows // *Proc. 5th Int. Conf. on Multiphase Flow.* Yokohama, Japan. 2004. Paper № 426.
31. **Buyevich Y.A.** Statistical hydromechanics of disperse systems. Part 1. Physical background and general equations // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 49. P. 489–507.
32. **Деревич И.В., Зайчик Л.И.** Осаждение частиц из турбулентного потока // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 5. С. 96–104.
33. **Деревич И.В., Зайчик Л.И.** Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // *ПММ.* 1990. Т. 54. С. 767–774.
34. **Зайчик Л.И.** Моделирование движения частиц в неоднородном турбулентном потоке на основе уравнения для функции плотности вероятности // *ПММ.* 1997. Т. 61. С. 132–138.
35. **Swaiiles D.C., Darbyshire K.F.F.** A generalized Fokker–Plank equation for particle transport in random media // *Physica A.* 1997. V. 242. P. 38–48.
36. **Hyland K.E., McKee S., Reeks M.W.** Derivation of a pdf kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. V. 32. P. 6169–6190.
37. **Zaichik L.I.** A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. P. 1521–1534.
38. **Derevich I.V.** Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // *Intern. J. Heat and Mass Transfer.* 2000. V. 43. P. 3709–3723.
39. **Pandya R.V.R., Mashayek F.** Kinetic equation for particle transport and heat transport in non-isothermal turbulent flows // *AIAA Paper.* 2002. № 2002–0337.
40. **Zaichik L.I., Oesterlé B., Alipchenkov V.M.** On the probability density function model for the transport of particles in anisotropic turbulent flow // *Phys. Fluids.* 2004. V. 16. P. 1956–1964.
41. **Reeks M.W.** On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // *Phys. Fluids A.* 1991. V. 3. P. 446–456.
42. **Reeks M.W.** On the continuum equation for dispersed particles in nonuniform flows // *Phys. Fluids A.* 1992. V. 4. P. 1290–1303.
43. **Pandya R.V.R., Mashayek F.** Non-isothermal dispersed phase of particles in turbulent flow // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 475. P. 205–245.
44. **Pozorski J.** Derivation of the kinetic equation for dispersed particles in turbulent flows // *J. Theor. Appl. Mech. (Warsaw, Poland).* 1998. V. 36. № 1. P. 31–46.
45. **Pozorski J., Minier J.-P.** Probability density function modeling of dispersed two-phase turbulent flows // *Phys. Revier E.* 1999. V. 59. P. 855–863.
46. **Peirano E., Minier J.-P.** Probabilistic formalism and hierarchy of models for polydispersed two-phase flows // *Phys. Rev. E.* 2002. V. 65. P. 046301-1–046301-18.
47. **Minier J.-P., Peirano E.** PDF model based on Langevin equation for polydispersed two-phase flows applied to bluff-body gas–solid flow // *Phys. Fluids.* 2004. V. 16. P. 2419–2431.
48. **Reeks M.W.** On probability density function equations for particle dispersion in a uniform shear flow // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 522. P. 263–302.
49. **Pope S.B.** Lagrangian PDF methods for turbulent flows // *Annual Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 23–63.
50. **Wang L.-P., Stock D.E.** Dispersion of heavy particles in turbulent motion // *J. Atmospheric Sci.* 1993. V. 50. P. 1897–1913.
51. **Деревич И.В.** Столкновения частиц в турбулентном потоке // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 2 С. 104–116.
52. **Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.** Pair dispersion and preferential concentration of particles in isotropic turbulence // *Phys. Fluids.* 2003. V. 15. P. 1776–1787.
53. **Алипченков В.М., Зайчик Л.И.** Кластеризация частиц в изотропном турбулентном потоке // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 3. С. 78–95.
54. **Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.** Statistical models for predicting particle dispersion and preferential concentration in turbulent flows // *Intern. J. Heat and Fluid Flow.* 2005. V. 26. P. 416–430.
55. **Алипченков В.М., Зайчик Л.И.** Дисперсия и кластеризация бидисперсных частиц в изотропной турбулентности // *Изв. РАН. МЖГ.* 2005. № 1. С. 94–107.
56. **Reade W.C., Collins L.R.** Effect of preferential concentration on turbulent collision rates // *Phys. Fluids.* 2000. V. 12. P. 2530–2540.
57. **Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y.** Statistical mechanical description and modelling of turbulent collision of inertial particles // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 415. P. 117–153.
58. **Saffman P.G., Turner J.S.** On the collision of drops in turbulent clouds // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. Pt 1. P. 16–30.